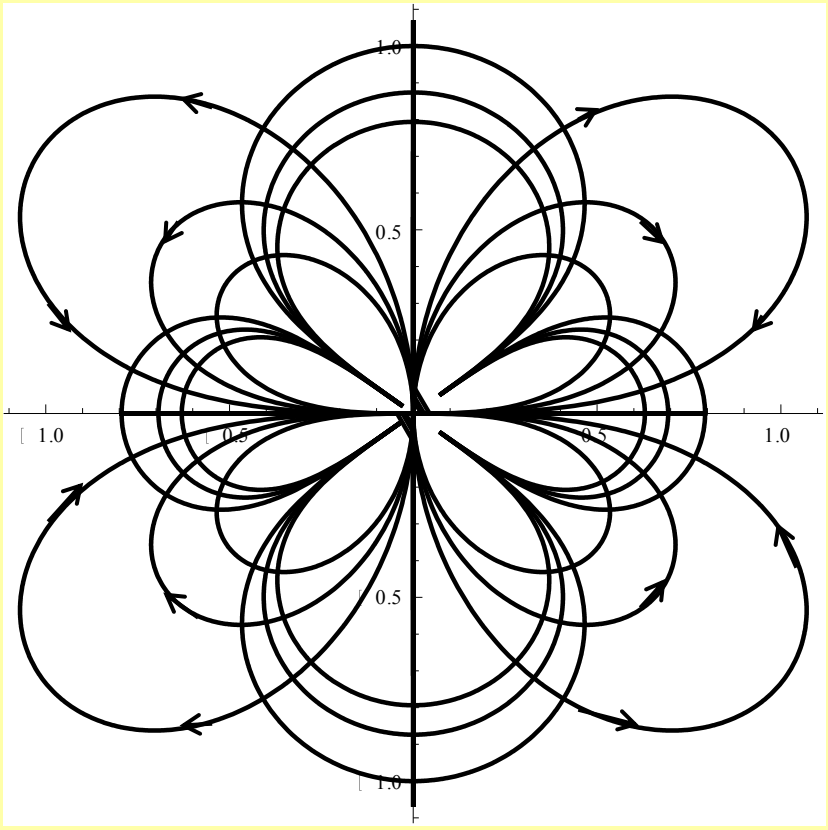
CURSO UNIVERSITARIO DE

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA



ARTURO TALLEDO

978-612-4072-51-2

A

Pilar Bellina,

compañera de toda mi vida

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a:

Mi hija Lety, ahora Dra. Lety del Pilar Talledo Bellina, por el tipeo de gran parte del manuscrito cuando era todavía estudiante universitaria.

Mi hijo Fernando, ahora Ing. Fernando Arturo Talledo Bellina, por la contribución con sus críticas a la presentación más didáctica de varios ejemplos.

Mi amigo Lic. Ricardo Vega, por la revisión cuidadosa del original.

PRÓLOGO

La Teoría Electromagnética fue desarrollada en el siglo XIX por físicos experimentales como Charles Coulomb (1736-1806), Michael Faraday (1791-1867), Hans Christian Oersted (1777-1851) y por físico-matemáticos como Andre Marie Ampere (1775-1836), Jean Baptist Biot (1774 -1862), Félix Savart (1791-1841) y Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Todos estos aportes fueron condensados y completados por James Clerk Maxwell en su histórica obra: ·"A Treatise on Electricity and Magnetism", en 1873.

Desde allí hasta ahora se han escrito cientos de libros sobre la teoría electromagnética, siendo los más importantes "Electromagnetic Theory" de Julius Adams Stratton en 1941 y "Classical Electrodynamics" de John David Jackson en 1962. Estos dos libros son tratados completos y excelentes libros de consulta para cualquier profesional en Física o Ingeniería o para cualquier estudiante de pregrado y posgrado en estas especialidades.

La teoría electromagnética explica el comportamiento de las interacciones electromagnéticas de la materia en base a 4 ecuaciones, universalmente conocidas como Las Ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones tienen su fundamento en 4 leyes de la naturaleza verificables experimentalmente en cualquier laboratorio. Por otro lado, esta teoría es el fundamento para la realización de miles de obras de Ingeniería, que se ejecutan en el mundo diariamente, siendo tal vez las más importantes la generación, y transmisión a nuestros hogares, de la energía que consumimos cotidianamente en forma de luz y calor, así como la comunicación inalámbrica entre dos puntos cualesquiera dentro y fuera de nuestro planeta.

Ahora bien, en un curso universitario de pregrado el estudiante tiene sólo 3 horas por semana durante 28 semanas (o 6 horas durante 14 semanas) para comprender esta teoría que fue desarrollada por decenas de científicos brillantes durante casi un siglo. Es por eso que los centenares de libros de Electromagnetismo que existen en el ambiente universitario compiten por presentar la teoría electromagnética en la forma más didáctica posible sin descuidar la precisión de los conceptos y la rigurosidad matemática.

En este libro tratamos de hacer fácil la teoría electromagnética, en primer lugar, siendo sistemáticos: Enunciamos las leyes experimentales básicas, usando álgebra vectorial a nivel de colegio secundario, luego invocamos el principio de superposición para establecer una relación integral entre cada unos de los campos (eléctrico y magnético) con sus fuentes (cargas y corrientes eléctricas). Enseguida usamos el Análisis Vectorial para expresar estas relaciones tal como aparecen en las ecuaciones de Maxwell. En segundo lugar desarrollando ejemplos específicos de cada una de las ecuaciones generales obtenidas. Y en tercer lugar, escogiendo los ejemplos de modo que haya una relación entre ellos haciéndolos fácil de recordar; por ejemplo: A partir del campo eléctrico de un disco uniformemente cargado se obtiene el campo eléctrico de un cilindro uniformemente polarizado y esta expresión es la misma que se obtiene para el campo inducción magnética de un solenoide o de un imán cilíndrico de magnetización uniforme.

Hemos creído importante enfatizar que la relación entre los campos y las fuentes es exactamente la misma en el vacío que dentro de los materiales involucrando inclusive las mismas constantes y que la diferencia está en la aparición de nuevas fuentes en el interior de los materiales: cargas polarización en electrostática y corrientes de magnetización en magnetostática. Se han hecho esfuerzos para explicar que los campos de interés físico son los campos Eléctrico e Inducción Magnética y que los campos Intensidad Magnética y Desplazamiento Eléctrico son sólo campos auxiliares que facilitan la solución de problemas concretos. Nos esforzamos también por hacer notar la diferencia entre relaciones causa-efecto (como la ley de Coulomb) y relaciones de coexistencia tales como las definiciones de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética o la expresión para el campo eléctrico en la vecindad inmediata de un conductor.

Es importante que al terminar este curso cada estudiante comprenda que los campos eléctrico y magnético, vistos como funciones vectoriales que al obedecer las ecuaciones de Maxwell quedan determinados por las cargas y corrientes eléctricas, son sólo casos particulares de una clase de funciones abstractas más amplia que según el teorema de Helmholtz quedan determinados por su divergencia y rotacional.

Lima, Octubre 2013.

Arturo Talledo

UNIDADES

En este libro sólo se usa el sistema internacional de unidades, es decir:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^{9}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$$

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = 3\times10^{8}\ m/s$$

Magnitud	**Unidad**	**símbolo**
Longitud	metro	m
Carga eléctrica	coulomb	C
Corriente eléctrica	ampere	A
Campo eléctrico	voltio/m newton/coulomb	V/m = N/C
Campo inducción magnética	tesla	T
Campo intensidad magnética	Ampere/metro	A/m
Energía	joule	J
Potencial electróstatico	voltio	V
Tiempo	segundo	s

CONTENIDO

CAPITULO 1 ANÁLISIS VECTORIAL

1.1 Introducción 1
1.2 Campos escalares y campos vectoriales 1
1.3 Gradiente 2
1.4 Divergencia y teorema de la divergencia 3
1.5 Rotacional y teorema de Stokes 5
1.6 Operador vectorial nabla 7
1.7 Identidades vectoriales 9
1.8 Coordenadas esféricas 10
1.9 Coordenadas cilíndricas 13
1.10 Coordenadas curvilíneas ortogonales 15
1.11 Ángulo sólido 17
1.12 La función delta de Dirac 19
1.13 Teorema de Helmholtz 22
Problemas 25

CAPÍTULO 2 ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

2.1 Introducción 31
2.2 Ley de Coulomb 32
2.3 Principio de Superposición 33
2.4 Campo eléctrico 35
2.5 Rotacional del campo eléctrico: Potencial electrostático 39
2.6 Divergencia del campo eléctrico: Ley de Gauss 47
2.7 El dipolo eléctrico 58
2.8 Expansión multipolar del campo eléctrico 66
2.9 Campo eléctrico promedio dentro de una esfera 78
2.10 Potencial de Tierra 81
Problemas 83

CAPÍTULO 3 ELECTROSTÁTICA Y CONDICIONES DE FRONTERA

3.1 Introducción 95

3.2 Problemas con una variable 99

3.3 Problemas con dos variables 104

Coordenadas Cilíndricas (series de Fourier) 104

Coordenadas Esféricas (series Fourier Legendre) 110

Coordenadas Cartesianas 121

3.4 Problemas con densidad volumétrica de carga 127

Problemas 131

CAPÍTULO 4 IMÁGENES ELECTROSTATICAS Y FUNCIONES DE GREEN

4.1 Introducción 135

4.2 Imágenes cilíndricas 138

4.3 Carga puntual y esfera conductora 148

4.4 Placa conductora infinita y carga puntual 156

4.5 Método de las funciones de Green en electrostática 159

Problemas 163

CAPÍTUULO 5 ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS DIELÉCTRICOS

5.1 Introducción 167

5.2 Campo en el exterior de un material polarizado 169

5.3 Campo eléctrico despolarizante 174

5.4 Susceptibilidad eléctrica, campo local y polarizabilidad 181

5.5 Problema general de la electrostática 184

5.6 Vector desplazamiento eléctrico y ley de Gauss 186

5.7 Carga puntual en un medio dieléctrico L.I.H. 188

5.8 Algunas aplicaciones de la ley de Gauss en dieléctricos 190

5.9 Condiciones de frontera para los campos E y D 192

5.10 Carga en la interface de dos medios dieléctricos 195

5.11 Ecuación de Laplace en medios dieléctricos 198

5.12 Conductores inmersos en medios dieléctricos 209

Problemas 213

CAPÍTULO 6 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA Y COEFICIENTES DE POTENCIAL

6.1 Energía electrostática de una distribución de cargas 221
6.2 Energía electrostática en función de los campos E y D 227
6.3 Capacitores 233
6.4 Cálculo de fuerzas y torques a partir de la energía 240
6.5 Coeficientes de Potencial 245
6.6 Energía de interacción 256
Problemas 267

CAPÍTULO 7 CORRIENTES ESTACIONARIAS

7.1 Corriente y densidades de corriente 273
7.2 Ecuación de continuidad 277
7.3 Ley de Ohm y conductividad 279
7.4 Fuerza electromotriz (fem) 282
7.5 Corrientes en medios sin fuentes de fem 284
Problemas 290

CAPÍTULO 8 MAGNETOSTATICA EN VACIO

8.1 Introducción 295
8.2 Fuerza magnética y campo inducción magnética 295
8.3 Fuerzas y torques sobre corrientes 297
8.4 Campos E, B y la teoría de la relatividad especial 300
8.5 Ley de Biot y Savart 304
8.6 Ley circuital de Ampere 311
8.7 Aplicaciones de la ley de Ampere 315
8.8 Ley de Gauss para el campo magnético 320
8.9 Potencial vectorial magnético 321
8.10 Aproximación dipolar del campo magnético 328
8.11 El potencial escalar magnético 330
Problemas 333

CAPÍTULO 9 MAGNETOSTATICA EN MEDIOS MATERIALES

9.1 Introducción 339

9.2 Magnetización 339

9.3 Campo B debido a un material magnetizado, corrientes de magnetización 340

9.4 Campo B debido a un material magnetizado, cargas de magnetización 343

9.5 El problema general de la magnetostática 347

9.6 El campo intensidad magnética H: Ley de Ampere 348

9.7 Caracterización magnética de los materiales 349

9.8 Condiciones de frontera para los campos B y H 351

9.9 Problemas de magnetostática por ecuación de Laplace 356

9.10 Circuitos magnéticos 368

Problemas 374

CAPÍTULO 10 LEY DE FARADAY

10.1 Introducción 381

10.2 Ley de Faraday 382

10.3 Campo eléctrico no conservativo en medios fijos 383

10.4 Campo eléctrico inducido por movimiento 385

10.5 Autoinductancia 391

10.6 Inductancia mutua 392

10.7 Fórmula de Neumann 393

Problemas 398

CAPÍTULO 11 ENERGÍA MAGNÉTICA

11.1 Introducción 401

11.2 Energía magnética de un circuito de corriente continua 402

11.3 Energía de un sistema de dos circuitos en medios L.I.H. 403

11.4 Energía de un sistema de n circuitos en medios L.I.H. 405

11.5 Energía magnética en términos de los campos B y H. 406

11.6 Cálculo de fuerzas y torques a partir de la energía 408

11.7 Energía de un circuito en un campo B externo 413

11.8 Presión magnética 416

11.9 Pérdidas por histéresis 417

Problemas 420

CAPÍTULO 12 ECUACIONES DE MAXWELL

12.1 Introducción 423
12.2 Contradicciones de la ley de Ampere 423
12.3 La ley Ampere Maxwell 425
12.4 Ecuaciones de Maxwell 429
12.5 Teorema de Poynting 431
12.6 La ecuación de onda en medios sin carga eléctrica 434
12.7 Soluciones armónicas y notación fasorial 436
12.8 Condiciones de frontera para campos armónicos 438
Problemas 441

CAPÍTULO 13 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS

13.1 Introducción 445
13.2 Ondas planas en dieléctricos perfectos 445
13.3 Ondas planas en medios disipativos 454
13.4 Polarización de ondas electromagnéticas 463
13.5 Promedio temporal de la energía y del vector de Poynting 471
Problemas 478

CAPÍTULO 14 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS

14.1 Planteamiento del problema general 481
14.2 Condiciones de frontera en la interface 482
14.3 Incidencia normal 484
14.4 Reflexión y Transmisión: incidencia oblicua 494
Problemas 506

CAPITULO 1

ANÁLISIS VECTORIAL

1.1 INTRODUCCION

En este capítulo hacemos un resumen de los conceptos del análisis vectorial que serán necesarios para comprender las relaciones entre los campos electromagnéticos y sus fuentes.

Los conceptos de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano son introducidos como conceptos independientes del sistema de coordenadas. Luego se explica cómo obtener las respectivas expresiones en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas. Se generaliza el método a coordenadas curvilíneas ortogonales.

También incluimos en este resumen el concepto de ángulo sólido, las propiedades de la función delta de Dirac y el teorema de Helmholtz.

1.2 CAMPOS ESCALARES Y CAMPOS VECTORIALES

En electromagnetismo como en cualquier otra rama de la física se trabaja fundamentalmente con magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Ejemplo típico de magnitud escalar es la temperatura y de cantidad vectorial, la velocidad.

Sin considerar variaciones con el tiempo, para describir la temperatura de una región del espacio necesitamos en el caso más general funciones de R^3 en R.

Definición: A las funciones de R^3 en R que describen magnitudes escalares en una región del espacio se les llama Campos Escalares.

Para describir las velocidades de las partículas de un fluido en una región del espacio, en un instante dado, necesitamos en general funciones de R^3 en R^3.

Definición: A las funciones de R^3 en R^3 que describen magnitudes físicas vectoriales se les llama Campos Vectoriales.

1.3 GRADIENTE

Definición: Se llama gradiente de un campo escalar f al campo vectorial grad f tal que:

$$df = \text{grad}\, f \bullet d\vec{\ell} \tag{1}$$

donde df es el incremento de la función f cuando el argumento cambia de $\vec{r}$ a $(\vec{r} + d\vec{\ell})$

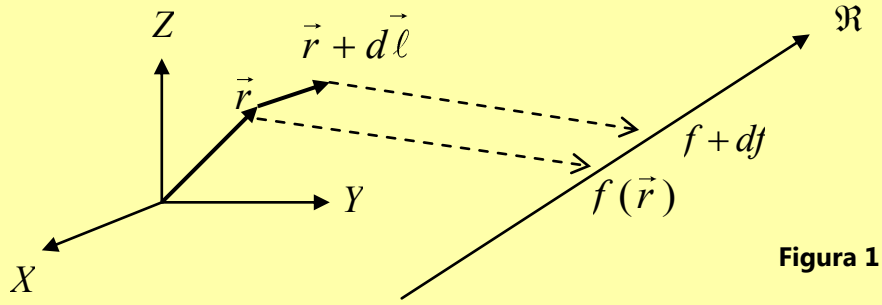


Figura 1

La expresión correspondiente en el análisis de funciones de R en R es:

$$df = f'(x)dx$$

Expresión para gradiente en coordenadas cartesianas:

Observando que el incremento del campo f cuando el vector posición cambia de $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ a $\vec{r} + d\vec{\ell} = (x + dx)\hat{i} + (y + dy)\hat{j} + (z + dz)\hat{k}$ también puede escribirse en la forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

y que el vector desplazamiento infinitesimal en coordenadas cartesianas es:

$$d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Entonces, tendremos:

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{2}$$

1.4 DIVERGENCIA Y TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Definición: La divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ es el campo escalar:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} \vec{F} \bullet d\vec{a} \tag{3}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA: Dado un campo vectorial $\vec{F}$ y una superficie cerrada S, entonces:

$$\oiint_{S} \vec{F} \bullet d\vec{a} = \iiint_{V} (\operatorname{div}\vec{F})\, dV$$

donde V es el volumen encerrado por la superficie S.

PRUEBA:

Si el volumen V encerrado por S lo dividimos en dos partes, V_1 y V_2, por una superficie S_0. Cada una de las partes quedará encerrada por superficie S_1 y S_2 respectivamente; siendo S_0 una superficie común. Es evidente que:

$$\oiint_{S} \vec{F} \bullet d\vec{a} = \oiint_{S_1} \vec{F} \bullet d\vec{a} + \oiint_{S_2} \vec{F} \bullet d\vec{a}$$

Si el volumen se divide en *N* elementos ΔV_i:

$$\oiint_{S} \vec{F} \bullet d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \oiint_{\Delta S_i} \vec{F} \bullet d\vec{a} \tag{i}$$

Si *N* es muy grande y ΔV muy pequeño, aplicamos la definición de divergencia

$$\oiint_{\Delta S_i} \vec{F} \bullet d\vec{a} = (\operatorname{div}\vec{F})\Delta V_i \tag{ii}$$

Reemplazando (ii) en (i)

$$\oiint_{S} \vec{F} \bullet d\vec{a} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{div}\vec{F})\Delta V_i$$

Luego:

$$\oiint_{S} \vec{F} \bullet d\vec{a} = \iiint_{V} (\operatorname{div}\vec{F})\, dV \tag{4}$$

Divergencia en coordenadas cartesianas:

En cualquier punto del espacio, en particular en (x, y, z) existe un vector $\vec{F}(x,y,z)$

Aplicando la definición de divergencia a la geometría de la fig.(2) tenemos:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{1}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z} \oiint_{\Delta S} \vec{F}\cdot d\vec{a}$$

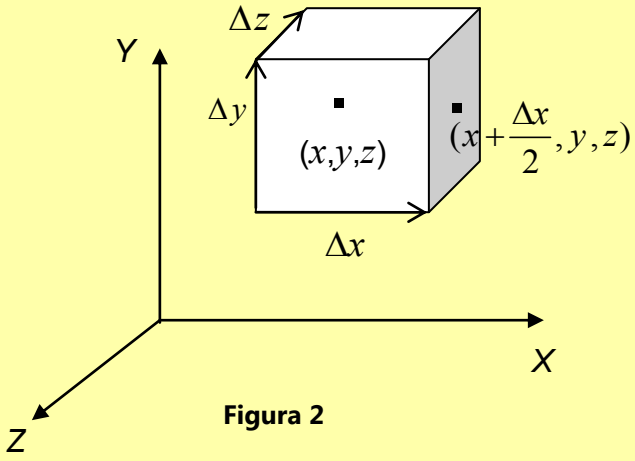


Figura 2

El flujo a través de la superficie del paralepípedo es la suma de los flujos a través de todas las caras:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{a} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{a} + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{a} + \ldots + \iint_{S_6} \vec{F}\cdot d\vec{a}$$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} F_x\, dy\, dz = F_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(i)}$$

$$\iint_{S_6} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} -F_x\, dy\, dz = -F_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(ii)}$$

(i) + (ii) : $$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{a} + \iint_{S_6} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(iii)}$$

Análogamente:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{a} + \iint_{S_5} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(iv)}$$

y $$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{a} + \iint_{S_4} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,. \qquad \text{(v)}$$

Sumando (iii) + (iv) + (v) obtenemos:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{a} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Luego:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}} \qquad (5)$$

1.5 ROTACIONAL Y TEOREMA DE STOKES

Definición: Rotacional de un campo vectorial $\vec{F}$ es un campo vectorial cuya componente a lo largo de una dirección $\hat{n}$ es:

$$(\text{rot}\,\vec{F})\cdot\hat{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{C_n}\vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad (6)$$

donde ΔS es un elemento de superficie perpendicular a $\hat{n}$, y C_n es el borde de ΔS recorrido en sentido positivo según la regla de la mano derecha.

Para determinar completamente el campo vectorial $\text{rot}\,\vec{F}$ necesitamos por lo menos hallar sus componentes en tres direcciones linealmente independientes.

TEOREMA DE STOKES: Dado un campo vectorial $\vec{F}$ y una trayectoria cerrada C, entonces:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{a}$$

donde S es cualquier superficie limitada por C.

PRUEBA

Si partimos la superficie S en un número muy grande de elementos ΔS_i limitados por trayectorias cerradas C_i puede comprenderse que:

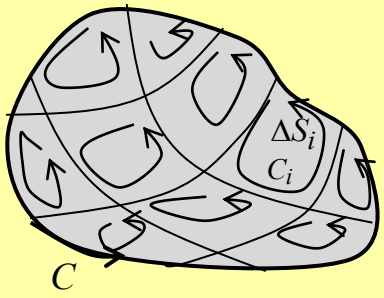


Figura 3

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad \text{(i)}$$

Si ΔS_i es muy pequeño (tiende a cero), de acuerdo con la definición (ec (6))

$$\oint_{C_i}\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = (\text{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n})\,\Delta S_i \qquad \text{(ii)}$$

reemplazando (ii) en (i): $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{N}\text{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,\Delta S_i$$

Si *N* tiende a infinito:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{a} \qquad (7)$$

Rotacional en coordenadas cartesianas:

Aplicamos la definición de rotacional (ec.(6)) al rectángulo de la figura (3) para hallar la componente x de $\text{rot}\,\vec{F}$

$$(\text{rot}\,\vec{F})\cdot\hat{i} \;=\; \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{1}{\Delta y\,\Delta z}\oint_{C_{yz}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad (*)$$

$$\oint_{C_{yz}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;+\; \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;+\; \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;\; \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

donde:

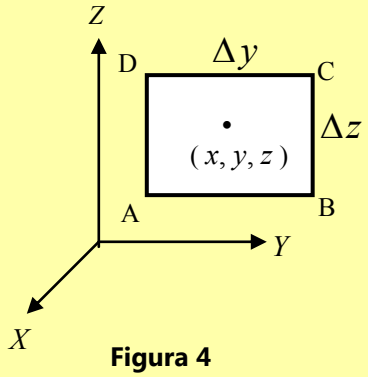


Figura 4

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int F_y\,dy \;=\; F_y(x,y,z-\Delta z/2)\,\Delta y \qquad \text{(i)}$$

$$\int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int F_z\,dz \;=\; F_z(x,y+\Delta y/2,z)\,\Delta z \qquad \text{(ii)}$$

$$\int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int F_y\,dy \;=\; -F_y(x,y,z+\Delta z/2)\,\Delta y \qquad \text{(iii)}$$

$$\int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int F_z\,dz \;=\; -F_z(x,y-\Delta y/2,z)\,\Delta z \qquad \text{(iv)}$$

Sumando miembro a miembro (i) + (iii) y (ii) + (iv) se obtiene respectivamente:

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;+\; \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; -\frac{\partial F_y}{\partial z}\,\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(v)}$$

$$\int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;+\; \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \frac{\partial F_z}{\partial y}\,\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(vi)}$$

Sumando miembro a miembro las ecs. (v) + (vi)

$$\oint_{C_{yz}} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \;-\; \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\,\Delta z \qquad \text{(vii)}$$

y reemplazando (vii) en (*) concluimos que:

$$(\text{rot}\,\vec{F})\cdot\hat{i} \;=\; \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \;-\; \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)$$

Por analogía se pueden obtener expresiones similares para las otras componentes cartesianas del rotacional, obteniendo finalmente:

$$\text{rot}\,\vec{F} \;=\; \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \;-\; \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} \;+\; \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \;-\; \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} \;+\; \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \;-\; \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (8)$$

1.6 OPERADOR VECTORIAL NABLA

Como una técnica memorística, para recordar rápidamente las expresiones de gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas cartesianas es conveniente definir el operador vectorial nabla.

Definición: Se llama operador vectorial nabla $(\vec{\nabla})$ al ente:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

No tiene ningún significado por sí solo pero opera como si fuera un vector. Con ayuda de este operador podemos obtener las expresiones $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\vec{F}$ en coordenadas cartesianas:

El gradiente de un campo escalar f es el producto del "vector" $\vec{\nabla}$ por el campo escalar f

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f$$

$$\vec{\nabla} f = \hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (2a)$$

La divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ es el producto escalar del "vector" $\vec{\nabla}$ por el campo vectorial $\vec{F}$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\bullet\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (5a)$$

El rotacional de un campo vectorial $\vec{F}$ es el producto vectorial del "vector" $\vec{\nabla}$ por el campo vectorial $\vec{F}$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$$

ó

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{8a}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Nótese que en los tres productos que acabamos de definir no tiene sentido hablar de conmutatividad.

Definición: Dado un campo escalar f se llama Laplaciano de f, a la divergencia del vector $\operatorname{grad} f$.

$$\operatorname{Lap} f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

La expresión para el laplaciano en coordenadas cartesianas es:

$$\operatorname{Lap} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)f$$

$$\operatorname{Lap} f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{9}$$

Definición: Dado un campo vectorial $\vec{F}$ se llama laplaciano vectorial de $\vec{F}$ al campo vectorial:

$$\nabla^2\vec{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z) \tag{10}$$

Con la ayuda del operador vectorial nabla $\vec{\nabla}$ podemos construir otros operadores vectoriales como por ejemplo:

$$f\vec{\nabla}, \quad \vec{G}\cdot\vec{\nabla}, \quad \vec{G}\times\vec{\nabla}, \quad \text{etc.}$$

1.7 IDENTIDADES VECTORIALES:

Las siguientes identidades vectoriales pueden demostrarse usando los conceptos mencionados anteriormente y serán usadas a lo largo del curso para explicar las propiedades de los campos electromagnéticos.

1) $\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla} f)\, g + f\, \vec{\nabla} g$

2) $\text{rot}\,(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$

3) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

4) $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = f\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F}$

5) $\vec{\nabla} \cdot \{f\,(\vec{\nabla} f)\} = f\,\nabla^2 f + (\vec{\nabla} f)^2$

6) $\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = f\,\vec{\nabla} \times \vec{F} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{F}$

7) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot}\,\vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot}\,\vec{G}$

8) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

9) $\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}$

10) $\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}$

11) $\iiint_V (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, dV = \oiint_S (\hat{n} \times \vec{F})\, da$

12) $\iiint_V (\vec{\nabla} f)\, dV = \oiint_S f\, \hat{n}\, da$

13) $\oint_C f\, d\vec{\ell} = \iint_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} f)\, da$

1.8 COORDENADAS ESFÉRICAS

Recordamos aquí las relaciones entre las coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas.

$$x = r\,\mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Cos}\phi \quad , \quad y = r\,\mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Sen}\phi \quad , \quad z = r\,\mathrm{Cos}\theta \tag{11a}$$

ó

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \quad , \quad \theta = \mathrm{Cos}^{-1}\frac{z}{r} \quad , \quad \phi = \mathrm{Tg}^{-1}\frac{y}{x} \tag{11b}$$

El vector posición $\vec{r}$, en función de las coordenadas esféricas y los vectores unitarios cartesianos, puede escribirse:

$$\vec{r} = r\,\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\phi\;\hat{i} + r\,\mathrm{Sen}\theta\;\mathrm{Sen}\phi\;\hat{j} + r\,\mathrm{Cos}\theta\,\hat{k} \tag{12}$$

Definición: Los vectores unitarios esféricos; $\hat{e}_r\,,\hat{e}_\theta\,,\hat{e}_\phi$; quedan definidos como la dirección y sentido en que cambia el vector posición al aumentar sólo $r\,,\theta\,,\phi$ respectivamente; es decir:

$$\hat{e}_r = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} \quad ; \quad \hat{e}_\theta = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|} \quad ; \quad \hat{e}_\phi = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right|} \tag{13}$$

De las expresiones (12) y (13) obtendremos la relación entre los vectores unitarios esféricos y cartesianos:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\,\hat{i} + \mathrm{Sen}\theta\;\mathrm{Sen}\phi\;\hat{j} + \mathrm{Cos}\theta\,\hat{k} \\
\hat{e}_\theta &= \mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\hat{i} + \mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sen}\phi\,\hat{j} - \mathrm{Sen}\theta\hat{k} \\
\hat{e}_\phi &= -\mathrm{Sen}\phi\,\hat{i} + \mathrm{Cos}\phi\,\hat{j}
\end{aligned} \tag{14}$$

De las ecs. (14) se pueden deducir las siguientes relaciones inversas:

$$\begin{aligned}
\hat{i} &= \mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\,\hat{e}_r + \mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\,\hat{e}_\theta - \mathrm{Sen}\phi\,\hat{e}_\phi \\
\hat{j} &= \mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Sen}\phi\,\hat{e}_r + \mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sen}\phi\,\hat{e}_\theta + \mathrm{Cos}\phi\;\hat{e}_\phi \\
\hat{k} &= \mathrm{Cos}\theta\;\hat{e}_r - \mathrm{Sen}\theta\;\hat{e}_\theta
\end{aligned} \tag{15}$$

Obsérvese de las ecs. (14) que los vectores unitarios esféricos son perpendiculares entre sí, es decir:

$$\hat{e}_r \bullet \hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta \bullet \hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi \bullet \hat{e}_r = 0$$

y además satisfacen las relaciones:

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \quad ; \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_r \quad ; \quad \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$$

DESPLAZAMIENTO ELEMENTAL Si a partir del punto P nos desplazamos a otro punto muy cercano, el vector posición variará de $\vec{r}$ a $\vec{r} + d\vec{\ell}$, donde $d\vec{\ell}$ se puede escribir en la forma:

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{e}_r + r\,d\theta\,\hat{e}_\theta + r\,\mathrm{Sen}\,\theta\,d\phi\,\hat{e}_\phi \qquad (16)$$

es decir, cualquier desplazamiento infinitesimal puede descomponerse en tres desplazamientos a lo largo de las direcciones de los vectores unitarios.

ELEMENTOS DE SUPERFICIE Cada par de componentes del desplazamiento infinitesimal define un elemento diferencial de área perpendicular al tercer vector unitario esférico. Así

$$\begin{aligned} da_r &= r^2\,\mathrm{Sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \\ da_\theta &= r\,\mathrm{Sen}\,\theta\,d\phi\,dr \\ da_\phi &= r\,d\theta\,dr \end{aligned} \qquad (17)$$

Recuérdese que da_r está sobre la esfera r = cte., da_θ sobre el cono θ = cte., y da_ϕ sobre el plano ϕ = cte. Un elemento de área arbitrario tendrá proyecciones sobre las tres superficies mencionadas y podrá ser considerada como un vector con componentes en las direcciones de los tres vectores esféricos unitarios:

$$d\vec{a} = da_r\,\hat{e}_r + da_\theta\,\hat{e}_\theta + da_\phi\,\hat{e}_\phi \qquad (18)$$

ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN Las tres componentes del vector desplazamiento elemental, $d\vec{\ell}$, definen un paralepípedo rectangular cuyo volumen es:

$$dV = r^2 \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, dr \tag{19}$$

GRADIENTE A partir de la definición ec (1) y de la expresión para el desplazamiento elemental ec (16) se obtiene:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{Sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi \tag{20}$$

DIVERGENCIA Usando la definición de divergencia, ec (3); así como las expresiones para los elementos de área y de volumen, ecs. (17) y (19).

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\operatorname{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{Sen}\theta \, F_\theta\right) + \frac{1}{r\operatorname{Sen}\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \tag{21}$$

ROTACIONAL Usando la definición de rotacional, ec.6, así como las expresiones para los elementos infinitesimales de desplazamiento y de área obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F} = {} & \frac{1}{r\operatorname{Sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{Sen}\theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right\}\hat{e}_r + \\ & \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\operatorname{Sen}\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\phi)\right\}\hat{e}_\theta + \\ & \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right\}\hat{e}_\phi\end{aligned} \tag{22}$$

LAPLACIANO A partir de la definición de laplaciano y las expresiones para grad y div en coordenadas esféricas podemos obtener:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{Sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{Sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{23}$$

1.9 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Relaciones de las coordenadas cilíndricas con las coordenadas cartesianas:

$$x = \rho\,\mathrm{Cos}\phi \quad , \quad y = \rho\,\mathrm{Sen}\phi \quad , \quad z = z \tag{24a}$$

$$\rho = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \quad , \quad \phi = Tg^{-1}\frac{y}{x} \quad , \quad z = z \tag{24b}$$

Vector posición en coordenadas cilíndricas y en función de los vectores unitarios cartesianos:

$$\vec{r} = \rho\,\mathrm{Cos}\phi\,\hat{i} + \rho\,\mathrm{Sen}\phi\,\hat{j} + z\,\hat{k} \tag{25}$$

Vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \mathrm{Cos}\,\phi\,\hat{i} + \mathrm{Sen}\,\phi\,\hat{j} \\ \hat{e}_\phi &= -\,\mathrm{Sen}\,\phi\,\hat{i} + \mathrm{Cos}\,\phi\,\hat{j} \\ \hat{e}_z &= \hat{k} \end{aligned} \tag{26}$$

Relaciones inversas:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \mathrm{Cos}\,\phi\,\hat{e}_\rho - \mathrm{Sen}\,\phi\,\hat{e}_\phi \\ \hat{j} &= \mathrm{Sen}\,\phi\,\hat{e}_\rho + \mathrm{Cos}\,\phi\,\hat{e}_\phi \\ \hat{k} &= \hat{e}_z \end{aligned} \tag{27}$$

Relaciones de ortonormalidad: Los vectores unitarios cilíndricos satisfacen:

$$\hat{e}_\rho \bullet \hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi \bullet \hat{e}_z = \hat{e}_z \bullet \hat{e}_\rho = 0$$

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_z \quad ; \quad \hat{e}_\phi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho \quad ; \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi$$

Elemento diferencial de desplazamiento:

$$d\vec{\ell} = d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho\,d\phi\,\hat{e}_\phi + z\,\hat{k} \tag{28}$$

Elementos diferenciales de área:

$$\begin{aligned} da_\rho &= \rho\,d\phi\,dz \\ da_\phi &= d\rho\,dz \\ da_z &= \rho\,d\phi\,d\rho \end{aligned} \tag{29}$$

Elemento diferencial de volumen:

$$dV = \rho\,d\phi\,d\rho\,dz \tag{30}$$

GRADIENTE:

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{31}$$

DIVERGENCIA:

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{32}$$

ROTACIONAL:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\phi\right) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{k} \tag{33}$$

LAPLACIANO:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{34}$$

1.10 COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

Relaciones de las coordenadas curvilíneas ortogonales con las coordenadas cartesianas:

$$\ell = \ell(x,y,z) \quad , \quad m = m(x,y,z) \quad , \quad n = n(x,y,z) \tag{35a}$$

$$x = x(\ell, m, n) \quad , \quad y = y(\ell, m, n) \quad , \quad z = z(\ell, m, n) \tag{35b}$$

Vector posición en coordenadas curvilíneas ortogonales y en función de los vectores unitarios cartesianos:

$$\vec{r} = x(\ell, m, n)\hat{i} + y(\ell, m, n)\hat{j} + z(\ell, m, n)\hat{k} \tag{36}$$

Vectores unitarios en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\hat{\ell}_0 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \ell}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \ell}\right|} \quad , \quad \hat{m}_0 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial m}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial m}\right|} \quad , \quad \hat{n}_0 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial n}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial n}\right|} \tag{37}$$

Relaciones de ortonormalidad:

$$\hat{\ell}_0 \bullet \hat{m}_0 = \hat{m}_0 \bullet \hat{n}_0 = \hat{n}_0 \bullet \hat{\ell}_0 = 0$$

$$\hat{\ell}_0 \times \hat{m}_0 = \hat{n}_0 \quad ; \quad \hat{m}_0 \times \hat{n}_0 = \hat{\ell}_0 \quad ; \quad \hat{n}_0 \times \hat{\ell}_0 = \hat{m}_0$$

Desplazamiento elemental:

$$d\vec{\ell} = h_\ell \, d\ell \, \hat{\ell}_0 + h_m \, dm \, \hat{m}_0 + h_n \, dn \, \hat{n}_0 \tag{38}$$

$$h_\ell = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \ell}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \ell}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \ell}\right)^2} \quad , \quad h_m = \ldots$$

Elementos diferenciales de área:

$$\begin{aligned} da_\ell &= h_m\, h_n\, dm\, dn \\ da_m &= h_n\, h_\ell\, dn\, d\ell \\ da_n &= h_\ell\, h_m\, d\ell\, dm \end{aligned} \tag{39}$$

Elemento diferencial de volumen:

$$dV = h_\ell\ h_m\ h_n\ d\ell\, dm\, dn \tag{40}$$

GRADIENTE:

$$\text{grad}\, f\ =\ \frac{1}{h_\ell}\frac{\partial f}{\partial \ell}\,\hat{\ell}_0\ +\ \frac{1}{h_m}\frac{\partial f}{\partial m}\,\hat{m}_0\ +\ \frac{1}{h_n}\frac{\partial f}{\partial \ell}\,\hat{n}_0 \tag{41}$$

DIVERGENCIA:

$$\text{div}\,\vec{F}\ =\ \frac{1}{h_\ell h_m h_n}\ \left\{\frac{\partial}{\partial \ell}(F_\ell h_m h_n)+\frac{\partial}{\partial m}(F_m h_n h_\ell)+\frac{\partial}{\partial n}(F_n h_\ell h_m)\right\} \tag{42}$$

ROTACIONAL:

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\vec{F}\ =\ &\frac{1}{h_m h_n}\left(\frac{\partial}{\partial m}(F_n\ h_n)-\frac{\partial}{\partial n}(F_m\, h_m)\right)\hat{\ell}_0\ + \\ &\frac{1}{h_n h_\ell}\left(\frac{\partial}{\partial n}(F_\ell\ h_\ell)-\frac{\partial}{\partial \ell}(F_n\, h_n)\right)\hat{m}_0\ + \\ &\frac{1}{h_\ell h_m}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}(F_m\ h_m)-\frac{\partial}{\partial m}(F_\ell\, h_\ell)\right)\hat{n}_0 \end{aligned} \tag{43}$$

LAPLACIANO:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_\ell\ h_m\, h_n}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{h_m\ h_n}{h_\ell}\frac{\partial f}{\partial \ell}\right)+\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{h_n\ h_\ell}{h_m}\frac{\partial f}{\partial m}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{h_\ell\ h_m}{h_n}\frac{\partial f}{\partial n}\right)\right) \tag{44}$$

1.11 ANGULO SÓLIDO

Definición. El elemento de **ángulo sólido** subtendido en un punto P (que tomamos como origen de coordenadas) por el elemento de área $d\vec{a}$ cuyo centro está ubicado en $\vec{r}$ es:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{da_r}{r^2} = \frac{d\vec{a} \bullet \hat{e}_r}{r^2}$$

donde $da_r = d\vec{a} \bullet \hat{e}_r$ es la componente del vector $d\vec{a}$ en la dirección de $\vec{r}$ (vector que va de P al centro del elemento de área $d\vec{a}$).

Definición: Por extensión de la anterior, podemos definir el ángulo sólido subtendido en un punto $\vec{r}'$ por un elemento de área $d\vec{a}$ cuyo centro está ubicado en el punto $\vec{r}$.

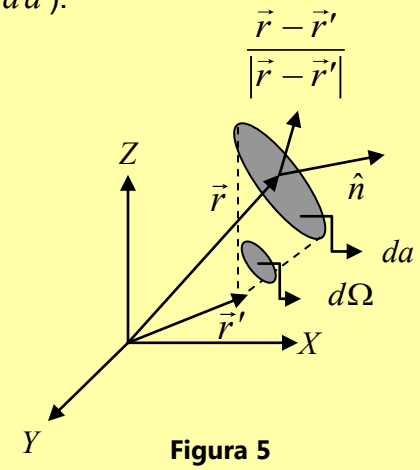


Figura 5

$$d\Omega = \frac{da\,\hat{n} \bullet (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Definición: El ángulo sólido subtendido en un punto P por una superficie finita S es:

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{d\vec{a} \bullet (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (45)$$

Ejemplo: Calcular el ángulo sólido subtendido por un disco de radio R que yace en el plano *XY* centrado en el origen, en un punto P ubicado a una distancia z sobre el eje perpendicular del disco.

Solución: Usemos la ec. (45) y refirámonos a la fig. (6):

$\vec{r}\,' = (0,0,z)$;

$\vec{r} = (\rho\cos\phi\ ,\ \rho\, sen\phi\ ,\ 0)$

$d\vec{a} = \rho\ d\rho\ d\phi\,\hat{k}$

Tendremos entonces:

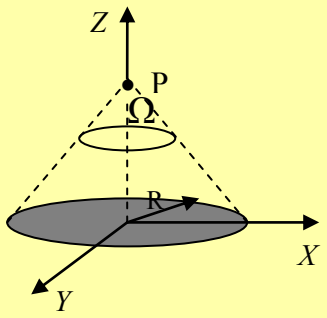


Figura 6

$$d\Omega = -\frac{z\ \rho\ d\rho\ d\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Omega = \iint d\Omega = -\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{z\ \rho\ d\rho\ d\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\Omega = 2\pi\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z}{|z|}\right)$$

Nótese que para puntos encima del disco el ángulo es siempre negativo y para puntos debajo del disco el ángulo sólido es positivo. (Tiene sentido hablar del signo del ángulo porque hemos asignado explícitamente un sentido al área del disco, ***k***). Observemos también que en z = 0 el sólido experimenta una discontinuidad de 4π.

Significado geométrico de ángulo sólido: $d\Omega$ es el área de la sombra que $d\vec{a}$ proyecta sobre una esfera de radio uno centrada en P.

De esta afirmación se deduce que el ángulo sólido subtendido por cualquier superficie cerrada S en un punto P dentro de la superficie es 4π. Y por un punto fuera de la superficie es cero.

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi\ , & \text{si P está dentro de } S \\ \\ 0\ , & \text{si P está fuera de } S \end{cases}$$

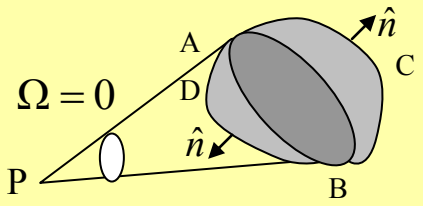


Figura 7. El ángulo sólido subtendido en P por ACB es el mismo que el subtendido por ADB, pero de signo contrario. $\Omega = 0$.

1.12 LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

Para facilitar una variedad de operaciones en Física e Ingeniería, Dirac propuso la introducción de la así llamada función delta, representativa de cualquier función nula en todo el dominio pero con un pico infinitamente agudo en $x = 0$.

Definición: Podemos considerar las dos siguientes expresiones como definición de la función delta de Dirac.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \infty , & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{46a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{46b}$$

Propiedad: De la definición dada se puede demostrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0) \tag{47}$$

Definición: Haciendo un cambio de variable puede extenderse el concepto para funciones que no tienen el pico infinito en $x = 0$ sino en cualquier otro punto del eje real.

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \neq x' \\ \infty, & \text{si} \quad x = x' \end{cases} \tag{48a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\, dx = 1 \tag{48b}$$

Propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x')\, dx = f(x') \tag{49}$$

FUNCIÓN DELTA DE DIRAC EN TRES DIMENSIONES

La definición dada en las ecs. (46) se puede extender también de la siguiente manera, para funciones de R^3 en R:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } \vec{r} \neq 0 \\ \infty \ , & \text{si } \vec{r} = 0 \end{cases} \tag{50a}$$

$$\iiint \delta(\vec{r})\, dV = 1 \tag{50b}$$

Propiedad:

$$\iiint f(\vec{r})\, \delta(\vec{r})\, dV = f(0) \tag{51}$$

Similarmente, para funciones que tienen el pico infinito en $\vec{r}'$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \infty \ , & \text{si } \vec{r} = \vec{r}' \end{cases} \tag{52a}$$

$$\iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, dV = 1 \tag{52b}$$

Propiedad:

$$\iiint_V f(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, dV = f(\vec{r}') \tag{53}$$

Un caso particular de función delta de Dirac

Puede demostrarse que

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\frac{1}{4\pi r^2} \hat{e}_r \right) = \delta(\vec{r}) \tag{54}$$

Prueba:

Aplicando la ec. (21) para la divergencia en coordenadas esféricas puede verse que:

$$\vec{\nabla}\bullet\left(\frac{1}{4\pi r^2}\,\hat{e}_r\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\left(\frac{1}{4\pi r^2}\right)\right\}=\begin{cases}0 & \text{si } \vec{r}\neq 0\\ \infty & \text{si } \vec{r}=0\end{cases}$$

Además, usando el teorema de la divergencia y el concepto de ángulo sólido se obtiene:

$$\iiint_V \vec{\nabla}\bullet\left(\frac{1}{4\pi r^2}\,\hat{e}_r\right)dV=\oiint_S\left(\frac{1}{4\pi r^2}\,\hat{e}_r\right)\bullet d\vec{a}\;=1$$

Efectivamente, hemos visto que la expresión definida en ec. (54) cumple con las dos relaciones que definen la función delta de Dirac en 3 dimensiones; además, teniendo en cuenta que:

$$\vec{\nabla}\left[\frac{1}{r}\right]=-\frac{1}{r^2}\;\hat{e}_r$$

La ec (54) también puede expresarse como:

$$-\nabla^2\left[\frac{1}{4\pi r}\right]=\delta(\vec{r}) \qquad (55)$$

Y desplazando el origen del sistema de coordenadas:

$$\vec{\nabla}\bullet\left(\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (56a)$$

También:

$$-\nabla^2\left(\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\right)=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (56b)$$

Finalmente, si derivamos respecto a x',y',z' en lugar de x,y,z

$$\vec{\nabla}'\bullet\left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{\vec{r}\,'-\vec{r}}{\left|\vec{r}\,'-\vec{r}\right|^3}\right)=-\,\vec{\nabla}'^2\left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{\left|\vec{r}\,'-\vec{r}\right|}\right)=\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}) \qquad (57)$$

1.13 TEOREMA DE HELMHOLTZ

Es también conocido como el teorema fundamental del análisis vectorial

Teorema: Un campo vectorial continuo $\vec{F}$, nulo en infinito, puede ser descompuesto como la suma del gradiente de un campo escalar y el rotacional de un campo vectorial.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{\omega} \tag{58}$$

Prueba:

Definamos el campo auxiliar.

$$\vec{V}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

y tomémosle el laplaciano vectorial:

$$\nabla^2\vec{V} = \nabla^2 V_x\hat{i} + \nabla^2 V_y\hat{j} + \nabla^2 V_z\hat{k}$$

$$\nabla^2 V_x = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} F_x(\vec{r}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} F_x(\vec{r}\,')\nabla'^2\frac{1}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|}dV'$$

De acuerdo con ec. (57): $$\nabla^2 V_x(\vec{r}) = \iiint_{V'} F_x(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r})\,dV'$$

$$\nabla^2 V_x = F_x(\vec{r})$$

Vemos que el campo $\vec{F}$ se puede escribir como el laplaciano del campo auxiliar $\vec{V}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla^2\vec{V}$$

Haciendo uso de la identidad vectorial (8)

$$\nabla^2\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\bullet\vec{V}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{\omega}$$

donde: $\varphi = -\vec{\nabla}\bullet\vec{V}$ y $\vec{\omega} = -\vec{\nabla}\times\vec{V}$

FÓRMULA EXPLÍCITA PARA φ

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\bullet\vec{V} = \vec{\nabla}\bullet\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{F_x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]+F_y\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]+F_z\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\right\}dV'$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{F_x\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]+F_y\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]+F_z\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\right\}dV'$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{\vec{F}(\vec{r}\,')\bullet\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}dV'$$

Por identidad vectorial 4 (ver sección 1.7)

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{\vec{\nabla}'\bullet\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}dV'+\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left\{\frac{\vec{\nabla}'\bullet\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}dV'$$

Por teorema de la divergencia y expandiendo el dominio de integración hasta infinito.

$$\iiint_{V'}\left\{\vec{\nabla}'\bullet\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}dV' = \oiint_{S_\infty}\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bullet d\vec{a} = 0$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{\nabla}'\bullet\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'} \qquad (59)$$

FÓRMULA EXPLÍCITA PARA $\vec{\omega}$

$$\omega_x(\vec{r}) = -(\vec{\nabla}\times\vec{V})_x = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_y(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'+\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F_z(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

$$\omega_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} F_y(\vec{r}\,')\,\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' - \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} F_z(\vec{r}\,')\,\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{F}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

Aplicando la identidad vectorial 6 de la sección 1.7 tendremos:

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' - \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{\nabla}'\times\frac{\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

Aplicando la identidad vectorial 11 al segundo sumando del segundo término y efectuando la integral de superficie sobre una superficie muy alejada (en infinito) se obtiene:

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{F}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \qquad (60)$$

Conclusión: De las ecuaciones (58), (59) y (60) se concluye que si conocemos el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ entonces podemos obtener una expresión explícita para dicho campo.

PROBLEMAS

1. **Definición alternativa de rotacional**. Demostrar que la definición de rotacional:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\vec{a} \times \vec{F}$$

es equivalente a la definición dada en la ecuación (6).

2. Demostrar la identidad vectorial (11) de la sección 1.7

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, dV = \oiint_S d\vec{a} \times \vec{F}$$

3. A partir de la definición de rotacional, ec. (6), obtenga la siguiente expresión en coordenadas cilíndricas.

$$(\text{rot}\,\vec{F})_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right]$$

4. A partir de la definición de divergencia, ec.(3), obtenga la siguiente expresión, válida para un campo de la forma: $\vec{F} = F\,\hat{e}_\rho$,

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F)$$

5. Verifique las siguientes identidades vectoriales:

a) $\text{div}\, f\vec{F} = f\,\text{div}\,\vec{F} + \vec{F} \bullet \vec{\nabla} f$

b) $\text{rot}\, f\vec{F} = f\,\text{rot}\,\vec{F} + \vec{\nabla} f \times \vec{F}$

c) $\text{div}\,(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \bullet \text{rot}\,\vec{F} - \vec{F} \bullet \text{rot}\,\vec{G}$

d) $\text{div}(f\vec{\nabla} f) = f\nabla^2 f - (\vec{\nabla} f)^2$

6. Evalúe:

a) $\vec{\nabla} \bullet (r^4 \vec{r})$ b) $\nabla^2 (\ln r)$

7. a) Demuestre: $\vec{\nabla} \times \left(F(r)\, \hat{e}_r \right) = \vec{0}$

b) Evalúe: $\vec{\nabla} \times (5 r^2\, \hat{e}_r)$ y $\vec{\nabla} \times (6\, r^2 \operatorname{Cos}^2\theta \operatorname{Sen}\phi\, \hat{e}_r)$

8. Si: $\vec{F} = 2yz\hat{i} - x^2 y\hat{j} + xz^2\hat{k}$

$\vec{G} = x^2\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$

$f = 2x^2yz$

Encontrar:

a) $(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\, f$, b) $\vec{F} \cdot \vec{\nabla} f$, c) $(\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{F}$, d) $(\vec{F} \times \vec{\nabla})\, f$, e) $\vec{F} \times \vec{\nabla} f$

9. Dado el campo $\vec{F} = \dfrac{c}{\rho}\, \hat{e}_\rho$, evaluar el flujo de $\vec{F}$ a través de una esfera de radio R centrada en el origen.

10 Dado el campo vectorial

$$\vec{F} = r \operatorname{Sen}\theta\, \hat{e}_r + r \operatorname{Cos}\theta\, \hat{e}_\theta - r\phi\,(1 + \operatorname{Sen}^2\theta)\, \hat{e}_\phi$$

Evaluar:

a) div $\vec{F}$ en el punto: x = 3 , y = 4 , z = – 2

b) rot $\vec{F}$ en el punto: x = – 2 , y = 0 , z = 0

c) $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{a}$, donde S es el hemisferio superior (encima del plano XY) de radio R = 3

d) el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de un cubo de lado ℓ = 3 centrado en el origen de coordenadas.

11. Si S es cualquier superficie cerrada S que encierra un volumen V y

$\vec{F} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}$

probar que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = (a + b + c)\, V$$

12. Dado el campo vectorial:

$$\vec{F} = x^3 \hat{i} + y^3 \hat{j} + z^3 \hat{k}$$

Evaluar:

a) El flujo de $\vec{F}$ a través de una esfera de radio R centrada en el origen.

b) La circulación de $\vec{F}$ a través de una circunferencia de radio R centrada en el origen y en el plano *XY*.

13. a) Representar el campo vectorial :

$$\vec{\mathrm{A}} = 2y\hat{i} - z\hat{j} + 3x\hat{k}$$

en coordenadas esféricas, especificando A_r , A_θ , A_ϕ .

b) Evaluar el flujo de $\vec{\mathrm{A}}$ a través de una esfera de radio 5 centrada en el origen.

c) Evaluar la circulación de $\vec{\mathrm{A}}$ a través de una circunferencia de radio 2 centrada en el origen y ubicada en el plano *XY*.

14. Sea: $\vec{F} = r\hat{e}_r + R\ \mathrm{Cos}\phi\ \hat{e}_\phi$

a) Evalúe el flujo de $\vec{F}$ través del cilindro cerrado de altura $2h$, radio R y centrado en el origen.

b) Evalúe la circulación de $\vec{F}$ a través de la circunferencia C :

$$\left\{ r = 1 \ , \ \theta = \frac{\pi}{3} \right\}$$

15. Dado el campo vectorial:

$$\vec{\mathrm{A}} = \left(x z^2 + \frac{x y^2}{2} \right) \hat{i} + \left(y x^2 + \frac{y z^2}{2} \right) \hat{j} + \left(z y^2 + \frac{z x^2}{2} \right) \hat{k}$$

a) Halle $\text{rot}\,\vec{A}$ en el punto $r = 5$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

b) Halle $\text{div}\,\vec{A}$ en el punto $\rho = 5$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $z = 1$.

c) Evalúe la circulación de $\vec{A}$ a través del rectángulo con vértices:

(2, 2, 1) ; (2, – 2, 1) ; (– 2, 2, 1) ; (– 2, – 2, 1).

16. Dado el campo escalar: $f = \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^{-1}$ demostrar:

a) $\vec{\nabla} f = \dfrac{\vec{r}' - \vec{r}}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3}$, b) $\vec{\nabla}' f = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3}$

17. Sea el campo vectorial $\vec{F} = k\vec{r}$, donde k es una constante;

a) Obtenga $\text{div}\,\vec{F}$ y $\text{rot}\,\vec{F}$

b) Halle un campo escalar f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$; si no es posible, explique la razón.

c) Dé una expresión para un campo vectorial $\vec{A}$ tal que $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{A}$; si no es posible explique la razón.

18. Demostrar que el campo vectorial : $\vec{F} = yz\hat{i} + zx\hat{j} + xy\hat{k}$ es irrotacional $(\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0})$ y solenoidal $(\text{div}\,\vec{F} = \vec{0})$; encuentre un campo $\vec{A}$ tal que $\text{rot}\,\vec{A} = \vec{F}$.

19. Dado el campo vectorial: $\vec{F} = r\hat{e}_r + \phi r\,\text{Sen}\theta\,\hat{e}_\phi$ y la superficie S : esfera de radio R centrada en el origen, verificar el teorema de la divergencia. Explique qué sucede.

20. Evaluar la integral de línea $\int \vec{F} \bullet d\vec{\ell}$ desde (0,0,0) hasta (1,2,4) si :

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + y\hat{j} + (xz - y)\hat{k}$$

a) a lo largo del segmento de recta que une los puntos dados.

b) a lo largo de la curva $x = t^2$, $y = 2t$, $z = 4t^3$

21. Dado el campo vectorial $\vec{F}$ expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{F} = (\rho \operatorname{Cos}\phi)\,\hat{e}_\rho + z\,(\rho \operatorname{Sen}\phi)\,\hat{k}$$

evaluar la circulación de $\vec{F}$ a través de una circunferencia de radio R centrada en el eje Z y en un plano paralelo al plano XY. ¿Es $\vec{F}$ un campo vectorial conservativo?

22. Evaluar:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \bullet d\vec{a}$$

donde : $\vec{F} = (x^2 + y - 4)\,\hat{i} + 3xy\,\hat{j} + (2xz + z^2)\hat{k}$ y S la superficie :

a) el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ sobre el plano XY.

b) el paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano XY.

23. Usando los teoremas de la divergencia y/o de Stokes, si lo considera conveniente, evaluar las siguientes integrales:

a) $\oiint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$ donde S una esfera de radio R centrada en el origen.

b) $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{\ell}$, donde $\vec{F} = -3y\,\hat{i} + 3x\,\hat{j} + \hat{k}$; C: circunferencia radio = 1 ubicada en el plano $z = 2$ y centrada en el eje Z.

CAPITULO 2

ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos el concepto de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ como una función de R^3 en R^3 que describe las propiedades de una región del espacio de ejercer fuerzas sobre cargas puntuales. La fuente de este campo es una distribución de carga $\rho(\vec{r})$ localizada en la misma región o en una región cercana. El primer objetivo es entonces escribir una expresión matemática para el campo en función de la distribución de carga.

Encontramos las expresiones para el rotacional y la divergencia del campo eléctrico. El rotacional del campo eléctrico es cero y la divergencia es la densidad de carga eléctrica por una constante. Rotacional nulo permite expresar el campo eléctrico como el gradiente de un potencial escalar que es definido como potencial electrostático. Y el hecho de que la divergencia esté relacionada a la densidad de carga significa que el potencial se puede escribir en función de la densidad de carga, de acuerdo con el teorema de Helmholtz.

Se establece la ley de Gauss y se usa para explicar algunas propiedades electrostáticas de los conductores y para cálculos rápidos de $\vec{E}(\vec{r})$ cuando la distribución de las fuentes es simétrica. El cálculo directo del campo o el potencial eléctricos requiere de la evaluación de integrales que no son siempre sencillas. Algunas veces resulta más conveniente conformarnos con expresiones menos exactas, aproximaciones, pero que son evaluables en forma más rápida. Estas aproximaciones se expresan en términos de conceptos como dipolo, cuadrupolo y multipolos eléctricos.

En este capítulo y en los dos siguientes nos restringimos a calcular el campo eléctrico en regiones del espacio vacías, no en el interior de los materiales.

2.2 LEY DE COULOMB

Las interacciones entre cuerpos que se encuentran cargadas eléctricamente y en reposo están gobernadas por la ley de Coulomb.

La fuerza $\vec{F}$ que una carga puntual q_1 ubicada en $\vec{r}_1$ ejerce sobre una carga puntual q ubicada en $\vec{r}$:

a) es proporcional al producto de las cargas $q\ q_1$

b) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|$

c) está dirigida a lo largo de la recta que los une, es decir:

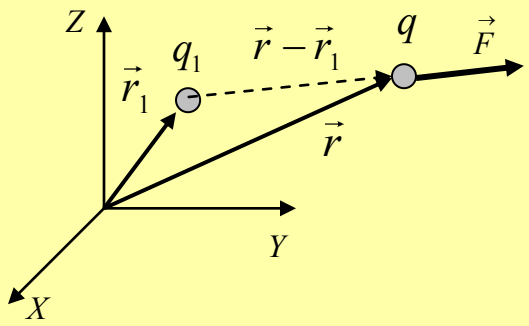


Fig. 1 Ley de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q\ q_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\ \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|} \tag{1}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = (8{,}987551679 \pm 0.000000066)\times 10^9\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{Coul^2}}$$

y en forma aproximada usaremos el valor

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times 10^9\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{Coul^2}}$$

ε_0 es una constante llamada permitividad eléctrica del vacío y cuyo valor es:

$$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{Coul^2}}{\mathrm{N\,m^2}}$$

2.3 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Dado un sistema de n cargas puntuales q_1 , q_2 , ... , q_n y otra carga puntual q; la fuerza que cualquier carga q_i , del sistema, ejerce sobre q es independiente de las otras (n–1) cargas y está determinada por la ec. (1). La fuerza que el sistema ejerce sobre q es la suma vectorial de las fuerzas que ejercen sobre q cada una de las q_i , es decir:

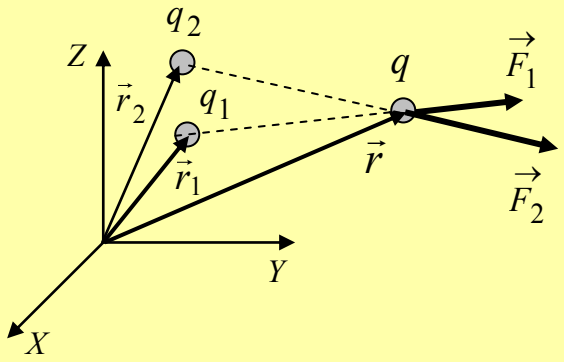


Fig. 2 Principio de superposición

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ q\,q_1 \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^3} + \quad \ldots \quad + q\,q_n \frac{(\vec{r}-\vec{r}_n)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_n\right|^3} \right\}$$

que en forma compacta se puede escribir:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q\,q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad (2)$$

Distribuciones continuas de carga: Cuando un cuerpo macroscópico está cargado eléctricamente, puede suponerse que la carga eléctrica se distribuye en forma continua a manera de una nube en su volumen y/o en su superficie y que esta distribución se puede expresar por funciones continuas de R^3 en R, llamadas:

Densidad volumétrica de carga: $\rho(\vec{r}')$

$$\rho(\vec{r}') = \frac{dq}{dV'} \qquad (3)$$

y densidad superficial de carga: $\sigma(\vec{r}')$

$$\sigma(\vec{r}\,') = \frac{dq}{da'} \tag{4}$$

Sin embargo, debe tenerse cuidado al aplicar el concepto de distribución continua de carga en problemas microscópicos, puesto que la carga está localizada en partículas muy pequeñas (electrones y protones) entre las cuales hay distancias relativamente grandes y desde este punto de vista no tiene sentido hablar de distribuciones continuas de carga.

La fuerza que una distribución volumétrica de carga, $\rho(\vec{r}\,')$, ejerce sobre una carga puntual q puede obtenerse por superposición de las fuerzas $d\vec{F}$ que todas las cargas puntuales $\rho\, dV'$ ejercen sobre la carga q.

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}\,') \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \tag{5}$$

De manera análoga, la fuerza que una distribución superficial de carga, $\sigma(\vec{r}\,')$ ejerce sobre una carga puntual q es la superposición de las fuerzas que cada una de las cargas puntuales $\sigma\, da'$ ejerce sobre q, es decir:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \sigma(\vec{r}\,') \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} da' \tag{6}$$

El principio de superposición se puede aplicar para calcular la fuerza que una distribución muy general de carga (discreta, superficial, volumétrica o lineal) ejerce sobre una carga puntual q ubicada en un punto $\vec{r}$. Podemos escribir por lo tanto:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \int \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right\}, \tag{7}$$

donde dq' puede ser $\rho\, dV'$, $\sigma\, da'$ ó $\lambda\, d\ell'$ según se trate de una distribución volumétrica, superficial ó lineal de carga.

2.4 CAMPO ELÉCTRICO

En vez de pensar que una distribución de carga ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre una carga puntual q ubicada en un punto $\vec{r}$, podemos pensar que el espacio (todos los $\vec{r}$), debido a la distribución de carga, adquiere una propiedad física que lo capacita para ejercer una fuerza sobre cualquier carga puntual que se coloque en un punto $\vec{r}$. Esta propiedad física queda cuantitativamente definida de la siguiente manera:

Definición: El campo eléctrico en un punto $\vec{r}$ es el límite de la razón: Fuerza electrostática $\vec{F}$ que actúa sobre una carga q colocada en $\vec{r}$ entre el valor de la carga, cuando ésta se aproxima a cero, es decir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \tag{8}$$

El proceso de límite nos asegura que $\vec{E}(\vec{r})$ es una función de R^3 en R^3 porque si q es muy pequeña no altera la distribución de carga cuyo campo eléctrico queremos determinar. Se tiene entonces que $\vec{E}(\vec{r})$ depende sólo de $\vec{r}$ (la posición) y de las cargas que lo producen pero no de la carga de prueba (q).

Aplicando la definición (8) a la expresión (7), que nos da la fuerza electrostática de un sistema general de cargas sobre una carga puntual q, tenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \int \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \tag{9}$$

Esta expresión nos da el campo eléctrico de una distribución conocida de carga discreta y/o continua en cualquier punto $\vec{r}$ del espacio.

Ejemplo 1. Un disco circular de radio R tiene densidad superficial de carga uniforme σ. Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto sobre el eje del disco, a una distancia z del centro del disco.

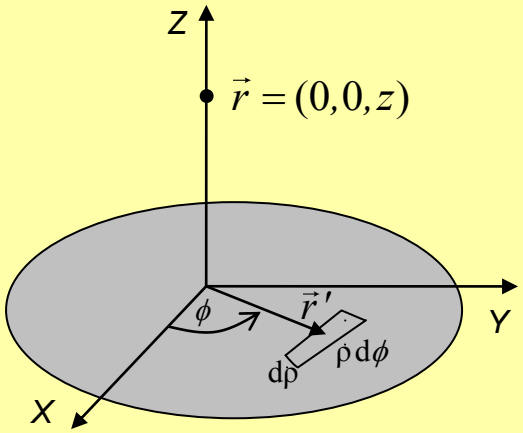


Figura (3) Cálculo del campo eléctrico de un disco con σ uniforme

Solución: Puesto que sólo hay σ, de la ecuación (9) sólo necesitamos el término:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S_{disco}} \frac{\sigma(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, da'$$

donde:

$$\vec{r} = (0,0,z) \quad , \quad \vec{r}\,' = (\rho\,\mathrm{Cos}\phi,\ \rho\,\mathrm{Sen}\phi,\ 0)$$

$$\sigma(\vec{r}\,') = \sigma = \text{constante}, \quad da' = \rho\, d\rho\, d\phi$$

luego:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(-\rho\,\mathrm{Cos}\phi,\ -\rho\,\mathrm{Sen}\phi,\ z)\,\rho\, d\rho\, d\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} .$$

Las componentes E_x y E_y son cero porque ambas integrales según ϕ se anulan; por lo tanto:

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi z) \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

y finalmente:

$$\boxed{\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{k}}$$

CONCEPTO DE PLANO INFINITO UNIFORMEMENTE CARGADO

En el resultado del ejemplo anterior, si el radio del disco cargado es mucho mayor que z (podemos decir que $R \to \infty$), se obtiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \hat{k} \\ \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \hat{k} \end{cases}$$

Es común expresar este resultado en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \hat{n}$$

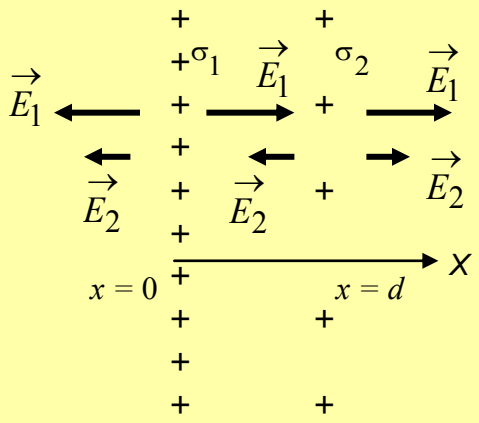
donde $\hat{n}$ es el vector unitario perpendicular al plano y saliendo de él.

El concepto de plano infinito es relativo. Por ejemplo, si z = 1 Å, un cuadrado o un círculo de algunos nm^2 puede ser considerado un plano infinito.

Ejemplo 2 Hallar el campo eléctrico debido a dos superficies planas infinitas uniformemente cargadas con densidades σ_1 y σ_2 separadas una distancia d.

Solución:

En la figura se muestran en cada región las contribuciones de cada uno de los planos cargados. Por principio de superposición se obtienen los valores respectivos.



$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\ \hat{e}_x \quad , & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\ \hat{e}_x \quad , & \text{si } 0 < x < d \\ \\ \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\ \hat{e}_x \quad , & \text{si } x > d \end{cases}$$

Fig. (4) Cálculo del campo eléctrico de dos planos infinitos con σ_1 y σ_2 $(\sigma_1 > \sigma_2)$.

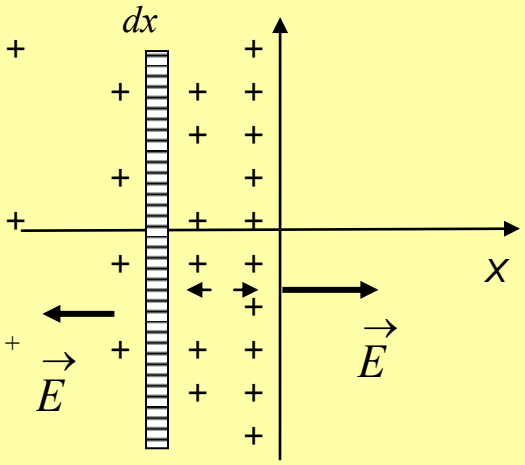
Ejemplo 3

En el semiespacio $x < 0$ existe una densidad volumétrica de carga que se puede expresar por la función:

$$\rho = \rho_0 \, e^{\,x/a} \quad , \quad x < 0$$

Hallar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

Solución:



Una laminilla de espesor dx puede ser considerado como un plano infinito con densidad superficial de carga

$$\sigma = \rho(x)\, dx\,,$$

y produce en un punto $x > 0$ el campo:

$$d\vec{E}(x) = \frac{\rho(x)\, dx}{2\varepsilon_0}\, \hat{e}_x$$

Figura (5) Distribución volumétrica de carga

Sumando las contribuciones de todas las laminillas, es decir, integrando

$$\vec{E}(x) = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{0} e^{\,x\,/a}\, dx\, \hat{e}_x$$

$$\boxed{\vec{E}(x) = \frac{\rho_0\, a}{2\,\varepsilon_0}\, \hat{e}_x \quad ; \quad x > 0}$$

Para puntos $x < 0$, evaluamos por separado las contribuciones de la carga a uno y otro lado de x:

$$\vec{E}(x) = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0} \left\{ \int_{-\infty}^{x} e^{x/a}\, dx - \int_{x}^{0} e^{x/a}\, dx \right\} \hat{e}_x$$

$$\boxed{\vec{E}(x) = \frac{\rho_0\, a}{2\,\varepsilon_0} \left[2e^{\,x/a} - 1 \right] \hat{e}_x}$$

Pregunta importante: ¿En qué punto cambia de sentido el campo eléctrico?

2.5 ROTACIONAL DEL CAMPO ELÉCTRICO: POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Aplicando el operador vectorial nabla a la expresión general para el campo eléctrico podemos probar que:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{E} = \vec{0}} \tag{10}$$

PRUEBA: Usando la ec. (9) vemos que el rotacional del campo eléctrico siempre se puede escribir como:

$$\text{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = \text{rot}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \int\frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\}$$

Por lo tanto:

$$\text{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}q_i\,\text{rot}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \int dq'\,\text{rot}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\},$$

Por cálculo directo en coordenadas cartesianas puede mostrarse que:

$$\text{rot}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \dfrac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \dfrac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Queda demostrado así que: *el rotacional del campo eléctrico debido a cualquier distribución de cargas en reposo es nulo.*

Por otro lado teniendo en cuenta la identidad vectorial (2) del capítulo anterior, es decir:

$$\text{rot}\left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{0}$$

Se concluye que el campo eléctrico de cualquier distribución de carga puede escribirse como el gradiente de un campo escalar.

Definición: Al campo escalar $U(\vec{r})$ tal que:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} U} \qquad (11)$$

lo llamaremos **Potencial Electrostático**.

NOTA: Puede observarse que cualquier otro campo escalar de la forma:

$$U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) + \text{constante}$$

también satisface la definición de la ec. (11). Para que el potencial electrostático asociado a un campo eléctrico establecido quede bien definido es necesario definir explícitamente el valor del potencial en un punto dado. Así, si convencionalmente aceptamos que en el punto $\vec{r}_0$ el valor del potencial es cero, a partir de la ec. (11) podemos escribir:

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -\vec{E} \bullet d\vec{\ell} \ . \qquad (12)$$

¿Qué significado físico tiene el potencial electrostático?

De la ec. (12) puede verificarse que $U(\vec{r})$, el potencial electrostático, es el trabajo hecho por un "agente externo" contra la fuerza electrostática para llevar la unidad de carga desde $\vec{r}_0$ hasta $\vec{r}$; o en otras palabras: $U(\vec{r})$ es el trabajo que la fuerza electrostática haría para llevar la unidad de carga desde el punto $\vec{r}$ hasta el punto de referencia $\vec{r}_0$. A este trabajo que "haría" la fuerza electrostática (o capacidad de trabajo) se le llama habitualmente *Energía Potencial*. Se dice por esto que el potencial electrostático U es la energía potencial de una unidad de carga en el campo $\vec{E}(\vec{r})$.

El signo menos de las ecuaciones (11) y (12) tiene que ver con la convención de la mecánica clásica (Primer curso de Física General). La suma de la energía cinética y energía potencial permanece constante. Recordar que el teorema trabajo energía nos relaciona la fuerza con el cambio de energía cinética:

$$\Delta(EC) = \vec{F} \bullet \Delta\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \Delta(EP) = -\vec{F} \bullet \Delta\vec{\ell}$$

FÓRMULA GENERAL PARA EL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Combinando las ecuaciones (12) y (9) podemos escribir:

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\,(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \int\frac{dq'\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right\}\bullet d\,\vec{\ell}\,,$$

que también puede escribirse en la forma:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\bullet d\vec{\ell} + \int dq'\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\bullet d\,\vec{\ell}\right\}$$

y utilizando el resultado: $\vec{\nabla}\,\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = -\dfrac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right) + \int dq'\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right\}.$$

Evaluando las respectivas integrales entre $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$, tenemos:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}_i|}\right] + \int dq'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,'|}\right]\right\}$$

Conviene entonces considerar que el punto de referencia $\vec{r}_0$ está en infinito de tal manera que el potencial de una distribución general de carga se simplifique a:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \int\frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\} \qquad (13)$$

donde dq' puede ser: $\lambda\,d\ell'$, $\sigma\,da'$ ó $\rho\,dV'$, según se trate de densidades lineales, superficiales ó volumétricas de carga, respectivamente.

Ejemplo 4

Hallar el potencial electrostático, U, debido a un anillo de radio R con carga q uniformemente distribuida; en cualquier punto del eje perpendicular que pasa por el centro del anillo. A partir del potencial, halle el campo eléctrico.

Solución:

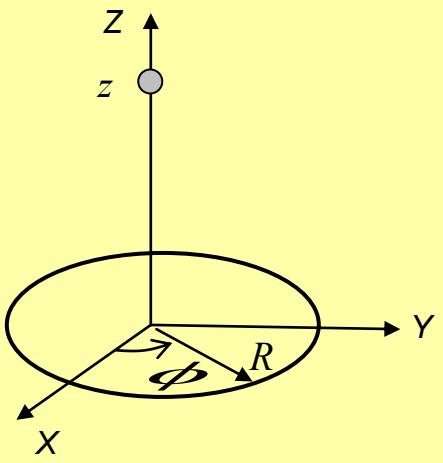


Figura (6) Potencial y campo eléctrico de un anillo con distribución uniforme de carga

$$U(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$

$$\vec{r} = (0,0,z)$$

$$\vec{r}\,' = (R\,\mathrm{Cos}\phi,\ R\,\mathrm{Sen}\phi,\ 0)$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right| = \left(R^2+z^2\right)^{1/2}$$

$$U(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

Para hallar el campo eléctrico usamos $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$; sin embargo, observando la contribución al campo de dos elementos dq diametralmente opuestos puede verse que sólo existe la componente z. Entonces:

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dz}\ \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{E}\,(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{k}}$$

Ejemplo 5: Hallar el potencial electrostático, en puntos del eje *Z* debido a un disco de radio R en el plano *XY* centrado en el origen con densidad superficial de carga uniforme σ.

Solución Nótese que $q_i = 0$, $\rho = 0$, $\lambda = 0$; entonces, la ec. (13) se reduce a:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S_{disco}} \frac{\sigma(\vec{r}\,')\, da'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

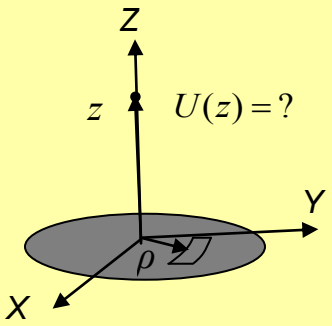
En este caso particular:

$$\vec{r} = (0,0,z)$$

$$\vec{r}\,' = (\rho\, Cos\phi,\ \rho\, Sen\phi,\ 0)$$

$$da' = \rho\, d\rho\, d\phi$$

$$\sigma(\vec{r}\,') = \sigma = \text{constante}$$



con lo cual se tiene:

$$U(\vec{r}) = U(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\phi}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

Al evaluar las correspondientes integrales tendremos:

$$U(0,0,z) = U(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(R^2 + z^2)^{1/2} - |z|\right]$$

Habiendo obtenido una expresión para $U(\vec{r})$ puede hallarse el campo eléctrico en el eje. Para ello verificamos primero que la distribución de carga es tal que $\vec{E} \,//\, \hat{k}$ y por lo tanto, la ec. (11) se reduce a:

$$\vec{E}(0,0,z) = -\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

de la cual se obtiene:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\hat{k}$$

Comparando con el ejemplo 1 se puede decir que resulta más fácil hallar primero el potencial U (una sola integral) y luego tomar el gradiente, en lugar de hallar directamente $\vec{E}$ haciendo tres integrales.

POTENCIAL ELECTROSTATICO DE PLANO UNIFORMEMENTE CARGADO

La ec. (13) es una expresión que permite calcular el potencial electrostático en una gran variedad de problemas, pero no es la definición de potencial electrostático. La ec. (13) no se puede aplicar, por ejemplo, cuando la distribución de cargas cuyo potencial estamos evaluando se extiende a infinito. En tales casos es necesario definir explícitamente el punto de referencia $\mathbf{r}_0$.

Si en la expresión para el potencial del disco que hemos obtenido en el ejemplo 5 hacemos $R \to \infty$, tendremos que para cualquier punto $\vec{r}$, el potencial $U(\vec{r}) \to \infty$. ¿Cuál es la gradiente de este potencial infinito? ¡No tiene sentido hablar de ello!

Sin embargo, sabemos que existe un campo eléctrico debido al plano cargado, esperamos por eso que haya un potencial electrostático asociado a dicho campo. Sabemos que la expresión para el campo eléctrico de un plano infinito es:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} \quad ; \quad si \quad z > 0 \\ \\ \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} \quad ; \quad si \quad z < 0 \end{cases}$$

(Hemos elegido un sistema de coordenadas tal que el plano *XY* coincide con la distribución de carga dada).
Tomando como convención explícita que el valor del potencial es cero en el plano $z = 0$, usando la ec. (12) obtenemos:

$$U(z) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \quad ; \quad \text{si} \quad z > 0 \\ \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \quad ; \quad \text{si} \quad z < 0 \end{cases}$$

Puede verificarse que esta función satisface la definición (11).

LÍNEAS DE FUERZA Y SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Conviene algunas veces tener representaciones gráficas de $\vec{E}(\vec{r})$ y $U(\vec{r})$.

Las **líneas de fuerza:** son curvas orientadas que representan gráficamente el campo eléctrico según las siguientes convenciones:

(i) sus tangentes en cualquier punto indican la dirección y sentido de **E** en ese punto.

(ii) el número de líneas por unidad de área es proporcional al módulo de **E**.

Puesto que el campo eléctrico de cargas positivas tiene dirección y sentido alejándose de las cargas y el de las cargas negativas se dirige hacia ellas, tendremos que “Las líneas de fuerza salen de cargas positivas y llegan a cargas negativas o al infinito; o bien vienen de infinito para terminar en cargas negativas”.

Superficies equipotenciales: son aquellas superficies en las cuales el potencial electrostático U tiene el mismo valor. Como ejemplo podemos decir que las superficies equipotenciales para la carga puntual de la Fig. 5a son esferas centradas en la carga q y para el plano cargado son planos paralelos a éste.

Es importante recordar que las líneas de fuerza son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales. La justificación de esta afirmación se basa en la siguiente relación, válida para cualquier desplazamiento $d\vec{\ell}$ contenido en la superficie equipotencial,

$$dU = \vec{\nabla} U \bullet d\vec{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{\ell}$$

De las definiciones de potencial electrostático y de líneas de fuerza puede deducirse que los valores máximos de potencial se obtienen donde hay cargas positivas o en infinito (donde “nacen” las líneas de fuerza) y los mínimos de potencial se dan donde hay cargas negativas o en infinito (donde terminan las líneas de fuerza).

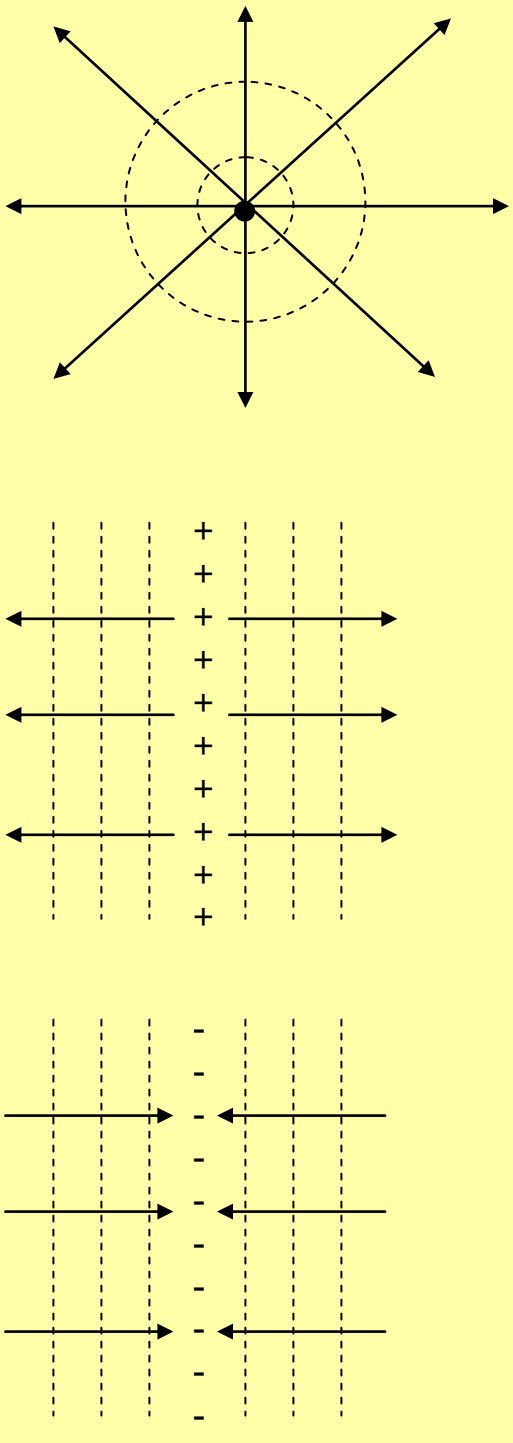


Fig. 7 Líneas de fuerza (líneas continuas) y superficies equipotenciales (líneas discontinuas) de algunas distribuciones de carga.

2.6 DIVERGENCIA DEL CAMPO ELÉCTRICO: LEY DE GAUSS

Aplicando el operador vectorial nabla a la expresión general para el campo eléctrico, ec. (9), podemos obtener una expresión general para la divergencia del campo eléctrico.

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\bullet\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \int\frac{\rho(\vec{r}')\,dV'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}q_i\,\vec{\nabla}\bullet\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \int\rho(\vec{r}')\,dV'\,\vec{\nabla}\bullet\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\bullet\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

y

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\rho(\vec{r}')\,\vec{\nabla}\bullet\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\rho(\vec{r}')\,\vec{\nabla}'\bullet\frac{(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}dV' = \iiint_{V'}\rho(\vec{r}')\,\delta(\vec{r}'-\vec{r})dV'$$

tendremos:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}\sum_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) + \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Generalizando el concepto de densidad volumétrica de carga para el caso de cargas puntuales:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases}0, & \text{si} \quad \vec{r}\neq\vec{r}_i \\ & = q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \\ \infty, & \text{si} \quad \vec{r}=\vec{r}_i\end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \qquad (14)$$

FLUJO ELÉCTRICO

Flujo eléctrico a través de una superficie S queda definido por la expresión:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

Usando la expresión general para el campo eléctrico, ec (9), podemos obtener un resultado para el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \int \frac{\rho(\vec{r}\,')\, dV' (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right\} \cdot d\vec{a}$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i \oiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot d\vec{a} + \int dq' \oiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot d\vec{a} \right\}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\oiint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot d\vec{a} = \Omega = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{r}_i \text{ está fuera de } S \\ 4\pi, & \text{si } \vec{r}_i \text{ está dentro de } S \end{cases}$$

se obtiene:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (15)$$

donde Q es la carga total encerrada por la superficie S.

Las ecuaciones (14) y (15) están relacionadas por el teorema de la divergencia, es decir, se puede pasar de una a la otra usando este teorema. Ambas son expresiones de la ley de Gauss. La ec. (14) es la expresión de la ley de Gauss en forma diferencial o puntual y la ec (15) es la expresión de la ley de Gauss en forma integral: El flujo del campo eléctrico es igual a la carga neta encerrada dividida por la permitividad eléctrica del vacío ε_0 .

LEY DE GAUSS Y CONDUCTORES

Aun cuando este capítulo se refiere principalmente al campo eléctrico en el espacio vacío, es conveniente introducir algunas propiedades electrostáticas de los conductores que se pueden explicar muy fácilmente usando la ley de Gauss.

1) Si un conductor está cargado, en un sistema electrostático, toda su carga eléctrica está distribuida en su superficie, es decir, la densidad volumétrica de carga dentro de un conductor en condiciones electrostáticas es nula. La explicación de esta propiedad se basa en que, en condiciones electrostáticas el campo eléctrico dentro del conductor es nulo y por lo tanto el flujo eléctrico y la carga encerrada por cualquier superficie dentro del conductor son también nulos.

2) Todo cuerpo conductor es una región equipotencial y por lo tanto su superficie es una superficie equipotencial. El campo eléctrico en su vecindad inmediata es entonces perpendicular a la superficie del conductor.

3) Con ayuda de la ley de Gauss se puede establecer una relación cuantitativa entre la densidad superficial de carga y el valor del campo eléctrico en la vecindad inmediata fuera del conductor.

El cálculo directo del flujo a través del pequeño cilindro es:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,\Delta a$$

y la ley de Gauss permite escribir:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sigma\,\Delta a}{\varepsilon_0}$$

luego: $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{n}$$

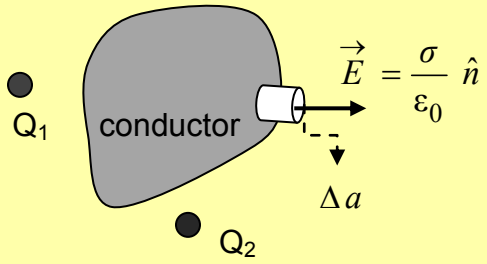


Figura (8)

expresión equivalente a:

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0\,\vec{E} \cdot \hat{n}} \qquad (16)$$

Esta es una relación de coexistencia, no causa efecto, es decir, el campo $\vec{E}$ no es creado sólo por la densidad de carga $\sigma\Delta a$ sino por todas las cargas del sistema electrostático.

LEY DE GAUSS Y SIMETRIA: La ley de Gauss es válida para cualquier superficie cerrada S, pero puede utilizarse para calcular rápidamente el campo eléctrico sólo cuando se tienen distribuciones de carga cuya simetría permite:

(i) predecir la dirección y sentido de $\vec{E}$ y (ii) determinar a priori superficies donde $\vec{E}$ es uniforme. Son casos típicos los siguientes:

Campo E de un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme (σ)

En este caso, considerando el plano infinito como la superposición de anillos concéntricos, de radio variable entre cero e infinito puede establecerse a priori que la dirección y sentido del campo eléctrico es perpendicular y alejándose del plano cargado.

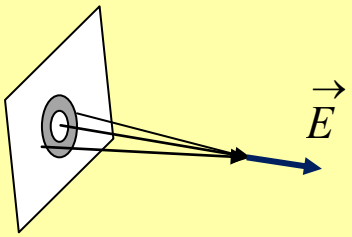


Figura (9) El campo eléctrico de un plano infinito es perpendicular al plano

También puede predecirse sin hacer ningún cálculo que el módulo del campo eléctrico es el mismo en cualquier punto de un plano paralelo al plano cargado.

Evaluemos el módulo del campo **E**:

Por cálculo directo obtenemos para el flujo eléctrico a través de paralepípedo de área S:

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = 2E\,\Delta a$$

y por ley de Gauss para el mismo flujo:

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{\sigma\,\Delta a}{\varepsilon_0}$$

luego:

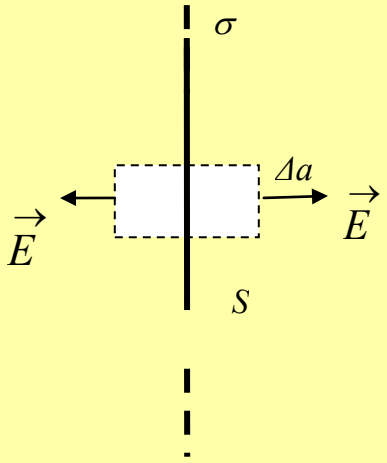


Fig. (10) Plano infinito con σ uniforme visto de perfil

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

Campo E de línea infinita con densidad lineal de carga (λ) uniforme

Considerando la contribución del campo eléctrico de dos elementos de la línea de carga puede establecerse a priori que el campo eléctrico es perpendicular a la línea de carga, es decir en la dirección $\hat{e}_\rho$

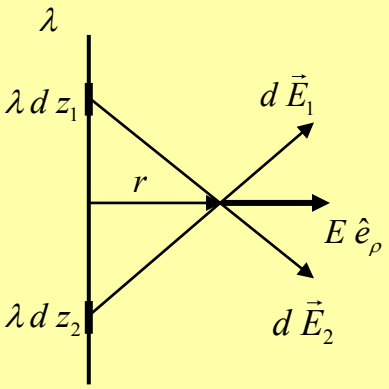


Figura (11a)

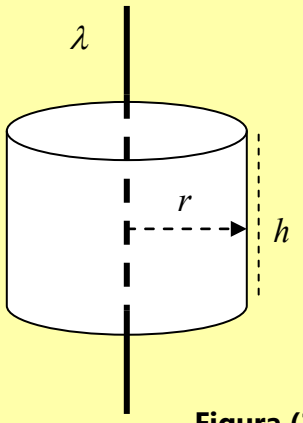


Figura (11b)

Por cálculo directo del flujo: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi r h E$

y por ley de Gauss: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

luego:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_\rho} \qquad (17)$$

Campo E de una superficie cilíndrica de radio R con σ uniforme

Viendo la superficie cilíndrica como una superposición de líneas de carga nos damos cuenta que $\vec{E} = E\,\hat{e}_\rho$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi r h E$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sigma\, 2\pi R h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\hat{e}_\rho} \qquad (18)$$

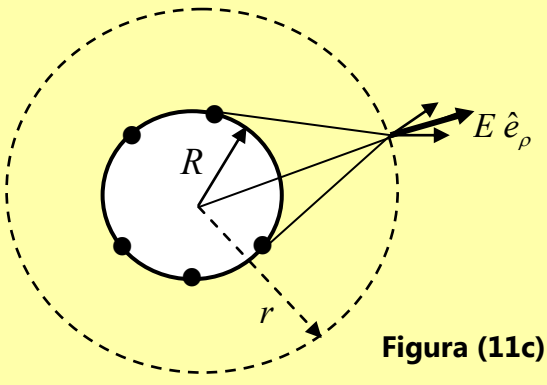


Figura (11c)

Campo E de una Esfera de radio R con densidad de carga uniforme (ρ)

Considerando una superficie esférica como una superposición de anillos cuyos centros se encuentran en un diámetro de la esfera, podemos comprender que el campo eléctrico de una superficie esférica uniformemente cargada es radial.

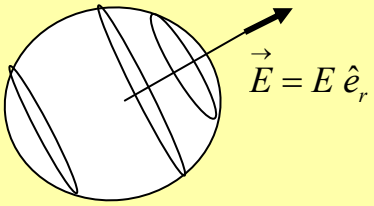


Figura (12a)

También es posible comprender que en el interior de una superficie uniformemente cargada el campo es cero,
Una esfera con densidad volumétrica de carga puede considerarse como una superposición de cáscaras esféricas.

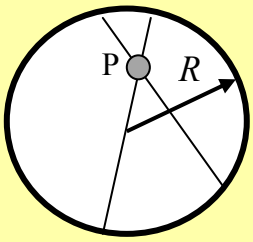


Figura (12b)

$$\vec{E}(P) = 0$$

Por cálculo directo del flujo:

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} \;=\; 4\pi r^2 E$$

y por ley de Gauss:

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} \;=\; \begin{cases} \dfrac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0} & ; \quad r > R \\[2ex] \dfrac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} & ; \quad r < R \end{cases}$$

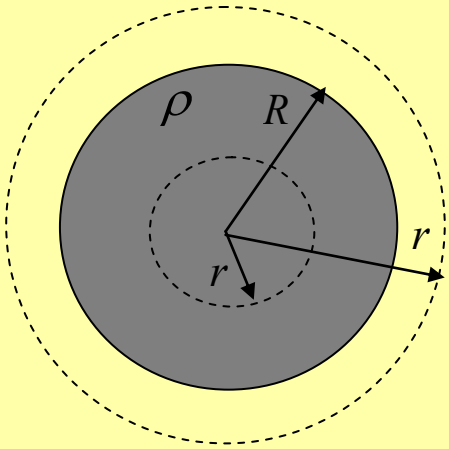


Figura (12c)

luego:

$$\vec{E} \;=\; \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{e}_r \quad , \quad \text{si} \quad r > R \qquad (19a)$$

$$\vec{E} \;=\; \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\hat{e}_r \quad , \quad \text{si} \quad r < R \qquad (19b)$$

Ejemplo 6

Dos láminas planas conductoras, infinitas, de espesores uniformes t_1 y t_2 respectivamente, se colocan paralelamente una a la otra con sus caras adyacentes separadas una distancia L. La primera lámina tiene carga total por unidad de área (suma de las densidades superficiales de carga en cada cara) igual a σ_A mientras que en la segunda es σ_B. Utilice argumentos de simetría y la ley de Gauss para demostrar que:

a) Las densidades superficiales de carga sobre las caras adyacentes son iguales en cantidad pero de signos opuestos.
b) Las densidades superficiales de carga en las caras exteriores del sistema son iguales.
c) Obténgase explícitamente las densidades de carga en cada cara, en función de σ_A y σ_B, y aplíquense estos resultados al caso especial $\sigma_A = -\sigma_B = \sigma$

Solución:

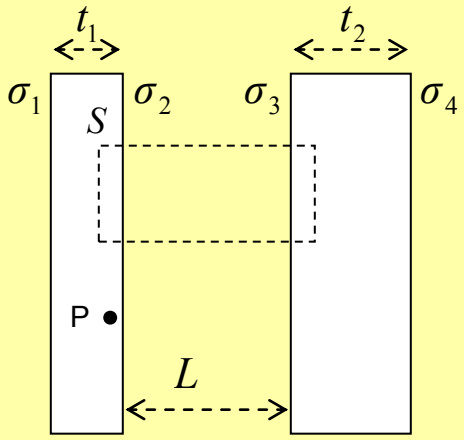


Figura. (13)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_A$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = \sigma_B$$

a) Para la superficie cerrada S mostrada en la fig. (13), por cálculo directo:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$$

y por ley de Gauss:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\varepsilon_0} (\Delta S)$$

luego:

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \qquad \text{L.q.q.d}$$

b) Para cualquier punto P dentro de los conductores, se sabe que el campo eléctrico es cero, pero por principio de superposición también se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{n} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

luego:

$$\sigma_1 = \sigma_4 \qquad \text{L.q.q.d}$$

c) Haciendo el cambio de notación:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \sigma' \qquad \text{y} \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma''$$

y observando la fig. (13) podemos escribir:

$$\sigma' + \sigma'' = \sigma_A \qquad \text{y} \qquad \sigma' - \sigma'' = \sigma_B$$

con lo cual se tiene: $\sigma' = \dfrac{\sigma_A + \sigma_B}{2}$ y $\sigma'' = \dfrac{\sigma_A - \sigma_B}{2}$

y para el caso particular: $\sigma_A = -\sigma_B = \sigma$ tendremos:

$$\sigma' = 0\,, \qquad \sigma'' = \sigma$$

Conclusión: Si dos láminas conductoras se cargan con cargas “iguales y de signos opuestos”, entonces sólo hay carga en las superficies internas. En las caras externas de las láminas la distribución de carga es nula.

Podemos entonces ver que el campo $\vec{E}$ es:

$\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$; entre las placas

$\vec{E} = \vec{0}$; en cualquier punto de las otras regiones

LEY DE GAUSS Y ECUACIONES DE PÖISSON Y LAPLACE

Si en la forma diferencial de la ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

reemplazamos el campo eléctrico por su equivalente, el gradiente del potencial electrostático,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U$$

podemos entonces escribir:

$$\boxed{\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (20)$$

A esta ecuación diferencial que se podría decir es la forma de la ley de Gauss en términos del potencial, se le llama ecuación de Pöisson y cuando se aplica a una región donde no hay densidad de carga $(\rho = 0)$ toma la forma:

$$\boxed{\nabla^2 U = 0} \qquad (21)$$

que se conoce con el nombre de ecuación de Laplace. En el capitulo III veremos la importancia de esta ecuación diferencial para resolver problemas de electrostática, específicamente, encontrar U en toda una región del espacio cuando se conoce sólo en las fronteras.

Por el momento veamos el siguiente tipo de problemas que pueden presentarse: dado el potencial electrostático en determinada región, encontrar la distribución de carga ρ y encontrar la carga neta encerrada por una superficie cerrada.

Ejemplo 7: Si el potencial electrostático está dado por la expresión:

$$U(r) = 5r^3 \text{ voltios} \quad (r \text{ en cm}),$$

encuentre la carga neta encerrada dentro de una esfera de un metro de radio centrada en el origen.

Solución:

$$U(r) = 5\times10^6\, r^3 \text{ voltios} \quad ; \quad (r \text{ en metros})$$

luego:

$$\nabla^2 U = 60\times10^6\, r$$

y de acuerdo a la ecuación (22)

$$\rho = -60\,\varepsilon_0\times10^6 r$$

integrando sobre una esfera de radio 1 m, tendremos:

$$\iiint \rho\, dV = \int_0^1 -60\varepsilon_0\times10^6\, r \times 4\pi r^2 dr$$

luego:

$$\boxed{Q = -\frac{15}{9}\times10^{-3} \text{ Coulomb}}$$

Ejemplo 8: El potencial medio temporal de un átomo de hidrógeno neutro está dado por:

$$U(r) = \frac{q\, e^{-\alpha r}}{4\pi\varepsilon_0\, r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)$$

donde q es la carga fundamental y $\alpha^{-1} = \frac{a_0}{2}$; a_0 es el radio de Bohr.

Hállese la distribución de carga (continua y discreta) que da lugar a ese potencial e interprétese físicamente el resultado.

***Primera solución**:* Evaluando el laplaciano del potencial dado tenemos:

$$\nabla^2 U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha^3\, e^{-\alpha r}}{2}$$

y de acuerdo a la ecuación de Pöisson (ec.22):

$$\rho = -\frac{q}{4\pi}\frac{\alpha^3\, e^{-\alpha r}}{2}$$

siendo entonces la carga volumétrica encerrada en una esfera de radio R:

$$Q_{Vol} = \iiint \rho\, dV = -\int_0^R \frac{\alpha^3 q\, e^{-\alpha r}}{2} r^2\, dr$$

Al evaluar esta integral se obtiene:

$$Q_{Vol} = -q + q\,e^{-\alpha R}\left(\frac{\alpha^2 R^2}{2} + \alpha R + 1\right)$$

Es importante observar que si $R \to \infty$, entonces $Q_{Vol} \to -q =$ carga del electrón

¿Es sólo la carga del electrón la que produce el potencial $U(r)$ del átomo?

Para contestar a esta pregunta veamos:

Otra solución: Tomando el gradiente del potencial dado podemos escribir:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r^2} + \frac{\alpha\, e^{-\alpha r}}{r} + \frac{\alpha^2}{2}\right)\hat{e}_r$$

y de acuerdo con la ley de Gauss, ec.(15), tenemos que la carga neta encerrada (discreta y contínua) en una superficie esférica de radio R es:

$$Q_{total} = \varepsilon_0 \oiint \vec{E} \bullet d\vec{a}$$

$$Q_{total} = q\,e^{-\alpha R}\left(\frac{\alpha^2 R^2}{2} + \alpha R + 1\right)$$

Nótese que las expresiones para Q_{Vol} y Q_{total} son diferentes:

$$Q_{total} - Q_{Vol} = q = \text{(carga del protón)}$$

Es decir, la ec. de Laplace usada en el primer método no da cuenta de las cargas puntuales; pero en este caso se podía intuir, antes de comenzar a resolver el problema, la presencia de una carga puntual en el origen porque el potencial allí es máximo (infinito).

RESPUESTA.- El potencial $U(r)$ se debe a una carga puntual q en el origen (es el núcleo del átomo) y a una carga – q (del electrón) distribuida alrededor del núcleo, según la expresión:

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi}\frac{\alpha^3 e^{-\alpha r}}{2}$$

2.7 EL DIPOLO ELÉCTRICO

En esta sección tratamos de precisar los conceptos de momento dipolar y de dipolo eléctrico. Discutimos también el potencial y el campo eléctrico de un dipolo eléctrico.

Definición: Se llama momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ de una distribución de carga a la cantidad:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i \qquad (22a)$$

ó

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,' dq' \ , \qquad (22b)$$

según la distribución sea discreta o contínua, respectivamente.

Nota: El momento dipolar eléctrico, $\vec{p}$, depende generalmente de la elección del origen de coordenadas. La relación entre los momentos dipolares $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ respecto a dos sistemas de coordenadas (O_1, x_1, y_1, z_1) y (O_2, x_2, y_2, z_2) respectivamente, es

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - q_n \vec{R}$$

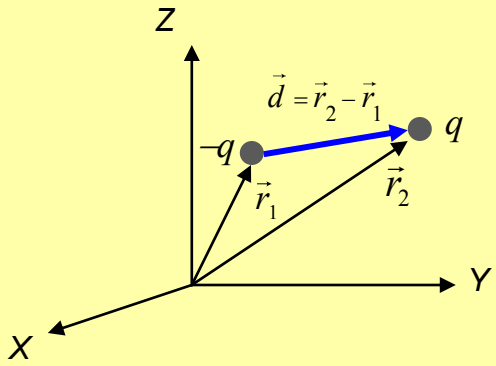
donde q_n es la carga neta de la distribución y **R** es el vector desplazamiento entre los orígenes de los dos sistemas de coordenadas (de O_1 a O_2). Si la carga neta de la distribución es cero entonces $\vec{p}$ es independiente del origen de coordenadas.

Para el caso particular de dos cargas puntuales q ubicada en $\vec{r}_2$ y $-q$ en $\vec{r}_1$, se obtiene que

$$\vec{p} = q\,\vec{d}$$

donde $\vec{d}$ es el vector desplazamiento que va de la carga $-q$ a la carga q.

Efectivamente, esto puede verse en la figura (14)



$$\vec{p} = q\vec{r}_2 - q\vec{r}_1$$

$$\vec{p} = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Fig. 14 Momento dipolar de dos cargas puntuales q y $-q$

Concepto de dipolo eléctrico: Obsérvese que si q se multiplica por un factor N y $\vec{d}$ se divide por el mismo factor, el momento dipolar eléctrico de las dos cargas q y $-q$ se mantiene constante, esto permite definir dipolo eléctrico como un sistema de dos cargas puntuales identificado con un solo punto

$$\vec{p} = \lim_{N\to\infty} (Nq)\left(\frac{\vec{d}}{N}\right),$$

es decir, **dipolo eléctrico** es un **dispositivo puntual** constituido por dos cargas q y $-q$ muy grandes ($q \to \infty$) separadas por un vector desplazamiento $\vec{d}$ muy pequeño ($\vec{d} \to 0$).

En la práctica podemos decir que dos cargas puntuales cualesquiera q y $-q$ separadas una distancia d constituyen un dipolo, siempre y cuando d sea pequeño, pero pequeño respecto a qué? ... respecto a las distancias de las cargas q y $-q$ a los puntos donde nos interesa calcular el potencial o el campo eléctrico. Esta idea quedará más clara después que calculemos el potencial y campo eléctrico de un dipolo.

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO DE UN DIPOLO ELÉCTRICO

Obtendremos ahora una expresión para el potencial electrostático de un dipolo a partir del potencial para dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d.

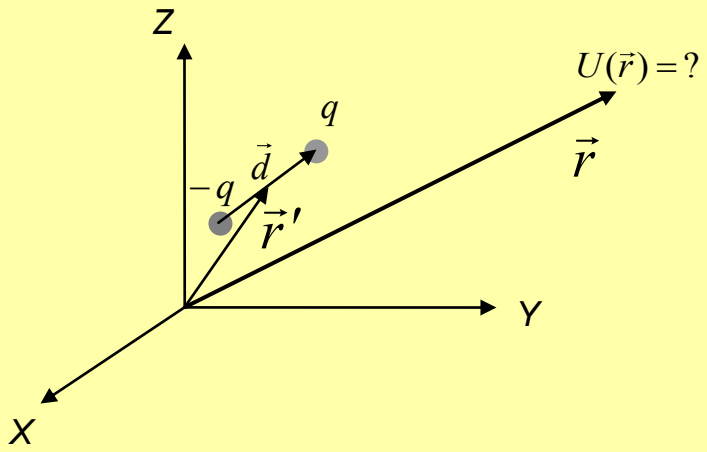


Fig. 15 El potencial de un dipolo eléctrico puede obtenerse como una aproximación del potencial de dos cargas puntuales.

El potencial, $U(\vec{r})$, debido a las dos cargas q y $-q$ es, de acuerdo a la ec. (13):

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'-\vec{d}/2\right|} - \frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'+\vec{d}/2\right|}\right\}, \qquad (23)$$

donde $\vec{r}'$ es el centro del vector $\vec{d}$. En los siguientes pasos usaremos:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Usemos expresiones aproximadas para los denominadores de la ec. (23)

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-1} = \left|\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-1} = \left(R^2 - \vec{R}\bullet\vec{d} + \frac{d^2}{4}\right)^{-1/2}$$

$$\left|\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-1} \approx R^{-1}\left(1 - \frac{\vec{d}\bullet\vec{R}}{R^2}\right)^{-1/2}$$

Usando la expresión para el desarrollo del binomio de Newton:

$$\left| \vec{r} - \vec{r}\,' - \frac{\vec{d}}{2} \right|^{-1} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{R} \bullet \vec{d}}{R^2} \right) \qquad (23a)$$

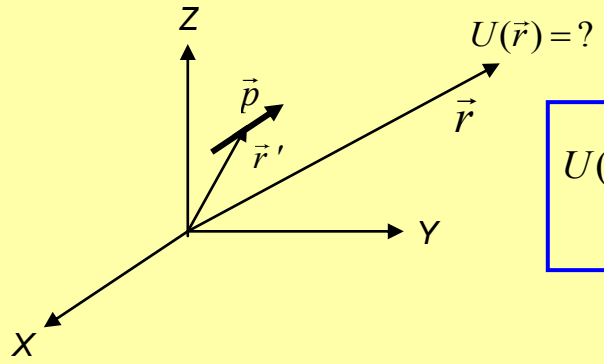
y, similarmente:

$$\left| \vec{r} - \vec{r}\,' + \vec{d}/2 \right|^{-1} \approx R^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{d} \bullet \vec{R}}{R^2} \right) \qquad (23b)$$

Reemplazando (23a) y (23b) en (23) tenemos:

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{\vec{d} \bullet \vec{R}}{R^3} \right\}$$

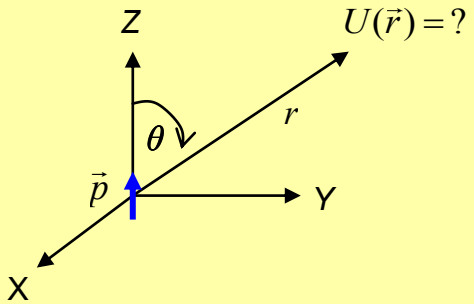
Teniendo en cuenta que $q\,\vec{d} = \vec{p}$ y $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ tendremos que el potencial debido al dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ ubicado en el punto $\vec{r}\,'$ está dado por:



$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|^3} \qquad (24)$$

Fig. 16 Potencial de un dipolo eléctrico

Nótese que si tomamos como origen de coordenadas la posición del dipolo y como eje Z la dirección de $\vec{p}$ tendremos: $\vec{r}\,' = \vec{0}$, $\vec{p} = p\,\hat{k}$, $\vec{p} \bullet \vec{r} = p\,r\,\mathrm{Cos}\theta$



$$U(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\ \mathrm{Cos}\theta}{r^2} \qquad (24a)$$

Fig. 17 Potencial de un dipolo en el origen con momento dipolar a lo largo del eje Z

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UN DIPOLO

El campo eléctrico de un dipolo puede obtenerse tomando el gradiente a la expresión del potencial electrostático (ec.(24)); pero también puede obtenerse como una aproximación del campo eléctrico de dos cargas q y -q. Así, de la ec.(9):

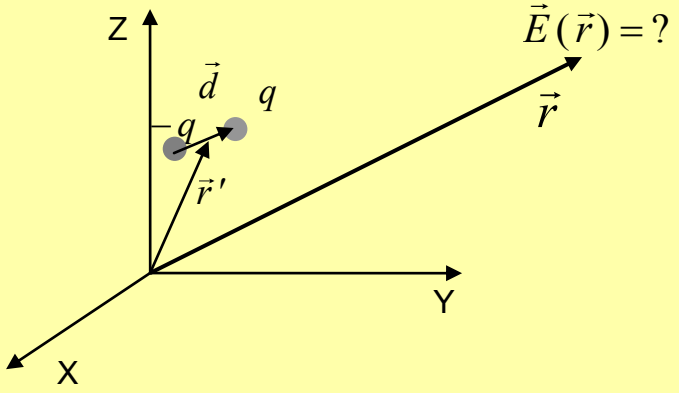


Fig. 18 Campo eléctrico de dos cargas puntuales q y $-q$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'-\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'-\frac{\vec{d}}{2}\right|^3} - \frac{\left(\vec{r}-\vec{r}\,'+\frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'+\frac{\vec{d}}{2}\right|^3}\right\} \qquad (25)$$

Haciendo el cambio de variable: $\vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{R}$, tendremos para puntos $\vec{r}$ muy alejados del dipolo $(R >> d)$:

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-3} = \left|\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-3} = \left(R^2 - \vec{R}\bullet\vec{d} + \frac{d^2}{4}\right)^{-3/2}$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-3} \approx R^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\vec{R}\bullet\vec{d}}{R^2}\right) \qquad (25a)$$

y

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'+\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-3} \approx R^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\vec{R}\bullet\vec{d}}{R^2}\right) \qquad (25b)$$

Reemplazando (25a) y (25b) en la ec.(25) se tiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(3\,\vec{d}\bullet\vec{R})\,\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{d}}{R^3}\right\}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{p} = q\,\vec{d}$ y que $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\ [\,\vec{p}\bullet(\vec{r}-\vec{r}\,')\,](\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^5} - \frac{\vec{p}}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^3}\right\} \qquad (26)$$

En particular, si tenemos un dipolo eléctrico y para expresar su campo eléctrico elegimos origen de coordenadas en la posición del dipolo ($\vec{r}\,' = \vec{0}$), como eje *Z* la dirección del momento dipolar ($\vec{p} = p\,\hat{k}$), y si usamos coordenadas esféricas, la ecuación (26) nos conduce a:

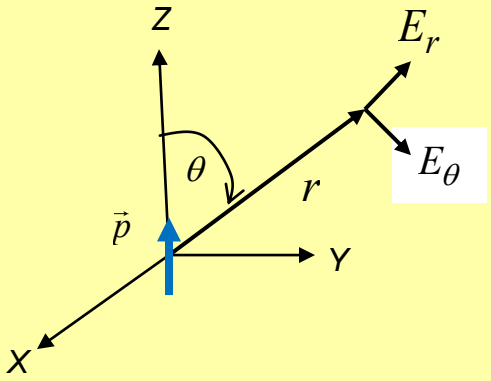


Fig. 19 El campo eléctrico de un dipolo con momento dipolar paralelo al eje *Z*

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2\ \ p\ \mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{p\ \mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta\right\} \qquad (26a)$$

La ecuación (26a) también pudo obtenerse aplicando la expresión para el gradiente en coordenadas esféricas al potencial dado en la ec.(24a). En caso que se necesite el campo y potencial electrostático de dos, de varios, o de una distribución continua de dipolos no queda otra alternativa que usar las ecuaciones (24) y (26).

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES DE UN DIPOLO ELÉCTRICO

Nótese que si en la ec (24a) asignamos un valor constante U al potencial $U(r,\theta)$, obtenemos la siguiente ecuación para la correspondiente superficie equipotencial

$$r = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\ \mathrm{Cos}\theta}{U} \right]^{1/2}$$

En la figura mostramos la intersección de algunas superficies equipotenciales con un plano que contiene al eje *Z*

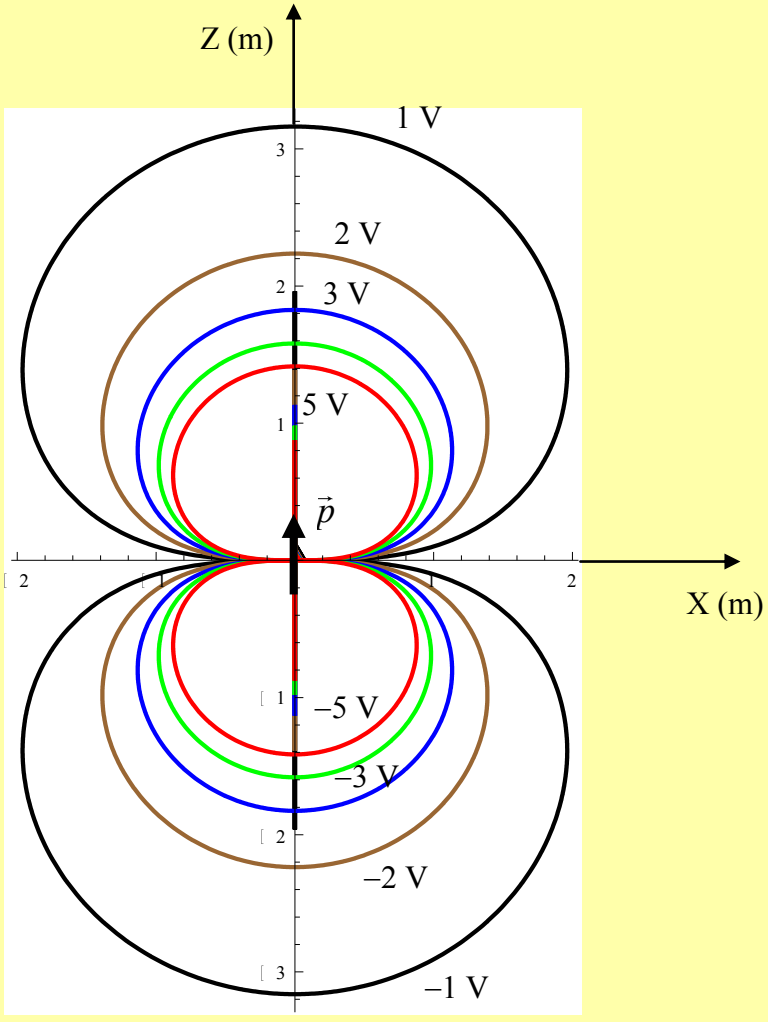


Fig. 20 Intersección de algunas superficies equipotenciales con un plano que contiene a **p**. (Las curvas han sido calculadas con programa Mathematica para los valores: $\mathbf{p} = 40\,\pi\,\varepsilon_0$ C m. $\mathbf{k}$, es decir, aproximadamente q = 1,1 μC y d = 1 mm.)

LÍNEAS DE FUERZA DE UN DIPOLO ELÉCTRICO

La ecuación 26a nos muestra que el campo eléctrico no tiene componente en la dirección $\mathbf{e}_\phi$, es decir, en cualquier punto $\vec{r}$ del espacio el campo $\vec{E}$ está contenido en el plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$. Por definición de líneas de fuerza sabemos que la relación entre las componentes E_r y E_θ es:

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{dr}{r\,d\theta}$$

Reemplazando las componentes del campo dado en la ec (28a) obtenemos:

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\,\mathrm{Cos}\theta\,d\theta}{\mathrm{Sen}\,\theta}$$

Integrando se obtiene una expresión finita para las líneas de fuerza del dipolo eléctrico:

$$r = C_2\,\mathrm{Sen}^2\theta$$

La figura nos muestra algunas líneas de fuerza que representan al campo de un dipolo. Las líneas mostradas están en un plano que contiene a $\vec{p}$.

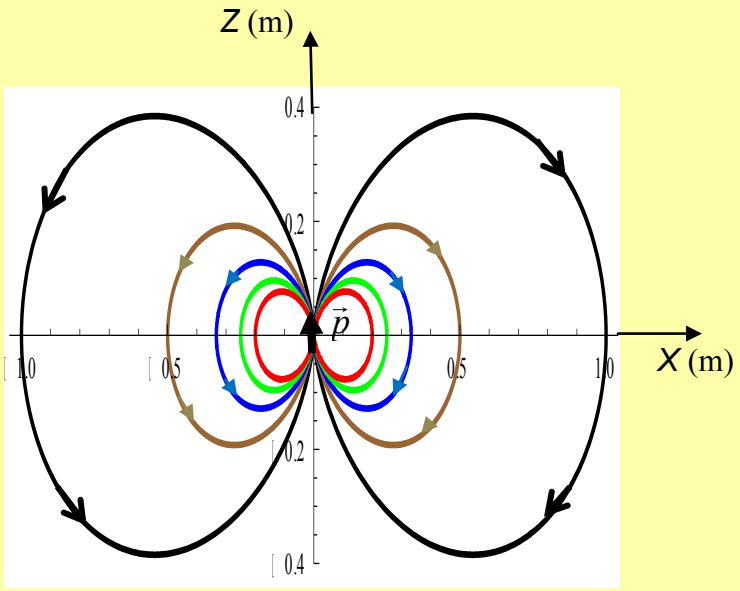


Fig. 21 Algunas líneas de fuerza de un dipolo eléctrico

2.8 EXPANSION MULTIPOLAR DEL CAMPO ELÉCTRICO

La expresión general para el potencial electrostático de una distribución de carga localizada en una región finita del espacio está dada por la ec.(13). Suponiendo que la distribución de cargas es continua:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{27}$$

donde dq' puede ser: $\lambda d\ell'$, $\sigma da'$, $\rho dV'$ según se trate de distribuciones lineal, superficial o volumétrica respectivamente.

(El tratamiento para una distribución discreta es análogo al que daremos a la distribución continua con los cambios: $dq' \to q_i$ y $\int \to \sum'$).

Aunque en principio la ec.(27) da el potencial electrostático en cualquier punto, debido a cualquier distribución continua de carga, muchas veces al momento de efectuar los cálculos correspondientes nos encontraremos con integrales elípticas u otras que no son muy fáciles de evaluar. En tales casos puede resultar conveniente contar con una expresión solamente aproximada del potencial electrostático pero mucho más fácil de manejar.

Demostraremos que el potencial electrostático se puede expandir de forma de serie:

$$U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) + U_4(\vec{r}) + U_8(\vec{r}) + \ldots$$

Asociaremos $U_1(\vec{r})$ con el potencial debido a la carga neta de la distribución, considerada como una carga puntual, $U_2(\vec{r})$ con el potencial debido al momento dipolar de la distribución de carga; y pueden definirse momento cuadrupolar y de orden superior que se asocian a las contribuciones $U_4(\vec{r})$ y a las demás respectivamente.

Consideremos que la distribución de carga cuyo potencial se desea evaluar se encuentra en una región finita, que elegimos el origen de coordenadas dentro o muy cerca de la distribución de carga y que sólo nos interesa evaluar el potencial en puntos **r** muy alejados de la distribución, es decir, puntos tales que $r >> r'$.

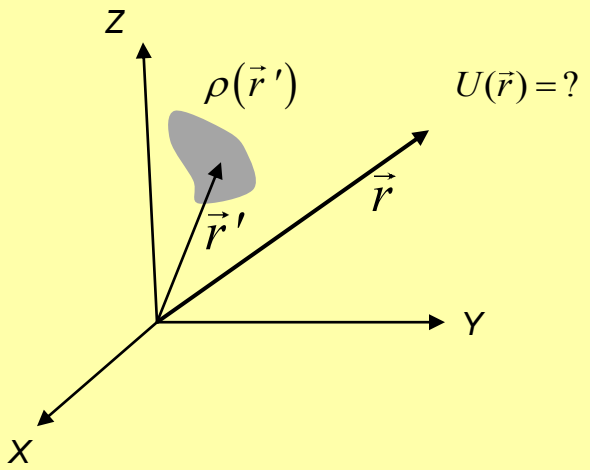


Fig. 22 Potencial de una distribución arbitraria de carga en puntos muy alejados

En tales casos podemos hacer la siguiente expansión:

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1} = (r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,' + \vec{r}\,'^2)^{-1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1} = r^{-1}\left[1 + \left(-\frac{2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{\vec{r}\,'^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1} = r^{-1}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{\vec{r}\,'^2}{r^2}\right)^2 \quad \ldots\right\}$$

Agrupando sucesivamente los términos proporcionales a r^{-1}, r^{-2}, r^{-3} y despreciando los términos de mayor potencia negativa tenemos:

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1} = \left\{\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{r^5} - \frac{\vec{r}\,'^2}{r^3}\right) + \ldots\right\} \qquad (27a)$$

Reemplazando la ec.(27a) en (27) se tiene:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dq'\left\{\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\bullet\vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{3(\vec{r}\bullet\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2 r^2}{r^5}\right) + \ldots\right\},$$

es decir,

$$U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) + U_4(\vec{r}) + \ldots \qquad (28)$$

donde:

$$U_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (28a)$$

es el potencial electrostático debido al momento monopolar (carga neta) de la distribución de carga:

$$q = \int dq' = \int \rho\, dV' \quad \text{ó} \quad q = \int \sigma\, da' \quad \text{ó} \quad q = \int \lambda\, d\ell'$$

considerado como una carga puntual en el origen de coordenadas.

$$U_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{r^3} \qquad (28b)$$

es el potencial debido al momento dipolar $\vec{p}$ de la distribución de carga:

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\, dq' = \iiint \vec{r}'\,\rho\; dV', \text{ ó} \quad \vec{p} = \iint \vec{r}'\sigma\, da' \quad \text{ó} \quad \vec{p} = \int \vec{r}'\lambda\, d\ell'$$

considerado como un dipolo puntual ubicado en el origen de coordenadas, y

$$U_4(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\int\left[3(\vec{r}\bullet\vec{r}')^2 - r'^2 r^2\right]dq' \;. \qquad (*)$$

Antes de darle una interpretación física a este término tengamos en cuenta que:

$$(\vec{r}\bullet\vec{r}')^2 = (xx' + yy' + zz')^2$$

puede escribirse también en la forma:

$$(\vec{r}\bullet\vec{r}\,')^2 = (x,y,z)\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\quad(x',y',z')\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

ó

$$(\vec{r}\bullet\vec{r}\,')^2 = (x,y,z)\bullet\begin{bmatrix}x'^2 & x'y' & x'z'\\ x'y' & y'^2 & z'y'\\ x'z' & y'z' & z'^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

y por otro lado:

$$r'^2 r^2 = (x,y,z)\bullet\begin{bmatrix}r'^2 & 0 & 0\\ 0 & r'^2 & 0\\ 0 & 0 & r'^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

Con lo cual el término encerrado entre corchetes en la ec.(*) se escribirá:

$$3(\vec{r}\bullet\vec{r}\,')^2 - r'^2 r^2 = (x,y,z)\bullet\begin{bmatrix}3x'^2-r'^2 & 3x'y' & 3x'z'\\ 3x'y' & 3y'^2-r'^2 & 3y'z'\\ 3x'z' & 3y'z' & 3z'^2-r'^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

Reemplazando esta expresión matricial en la ec.(*) y teniendo en cuenta que la integración es sobre la distribución de carga, es decir, sobre puntos $\vec{r}\,'=(x',y',z')$; los términos $\vec{r}=(x,y,z)$ pueden salir fuera de la integral como factor común; tendremos:

$$U_4(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\vec{r}\bullet\overleftrightarrow{Q}\,\vec{r} \qquad (28c)$$

donde:

$$\overleftrightarrow{Q} = \int\begin{bmatrix}3x'^2-r'^2 & 3x'y' & 3x'z'\\ 3x'y' & 3y'^2-r'^2 & 3y'z'\\ 3x'z' & 3y'z' & 3z'^2-r'^2\end{bmatrix}dq' \qquad (29)$$

es la cantidad tensorial llamada *momento cuadrupolar eléctrico.*

Observemos que el tensor momento cuadrupolar se puede expresar de la siguiente manera:

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

donde:

$$Q_{xx} = \int (3x'^2 - r'^2) dq' \qquad (30a)$$

$$Q_{yy} = \int (3y'^2 - r'^2)\, dq' \qquad (30b)$$

$$Q_{zz} = \int (3z'^2 - r'^2) dq' \qquad (30c)$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \int 3\, x'\, y'\, dq' \qquad (30d)$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = \int 3\, x'\, z'\, dq' \qquad (30e)$$

$$Q_{zy} = Q_{yz} = \int 3\, y'\, z'\, dq' \qquad (30f)$$

Dada una distribución de carga para expresar su momento cuadrupolar no se necesita evaluar 9 cantidades de una matriz (3x3), ni las seis de una matriz simétrica que acabamos de describir; sino sólo cinco porque como puede verificarse la suma de los términos de la diagonal es siempre nula.

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

Basta evaluar dos de los términos de la diagonal y el otro será la suma algebraica de los ya calculados con signo contrario.

Remarcamos que si la distribución de carga es discreta, el momento cuadrupolar se sigue calculando como en las ecs.(30) pero haciendo los cambios: q_i por q' ; $\sum$ por $\int$ y $\vec{r}_i$ por $\vec{r}'$

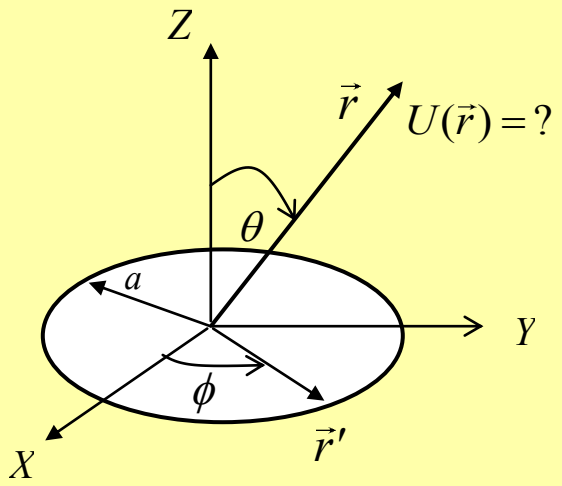
La ec. (30) podemos escribirla ahora de la siguiente manera:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}\bullet\overleftrightarrow{Q}\,\vec{r}}{2\,r^5} + \cdots\right) \qquad (31)$$

Ejemplo 9: Dado un anillo de radio a y densidad lineal de carga uniforme λ. Calcular la aproximación hasta el orden cuadrupolar del potencial electrostático, válida en puntos alejados del anillo $(r >> a)$. Obtenga también una expresión exacta para el potencial en puntos del eje perpendicular al anillo y expandiéndola como un binomio de Newton, observe que para $z >> a$ se obtiene el mismo resultado que en la expansión multipolar.

Solución:

Antes de aplicar la ec.(31) debemos calcular el momento monopolar, las tres componentes del momento dipolar y las nueve (cinco) componentes del momento cuadrupolar.



$$q = \lambda (2\pi a) \qquad (*)$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,' \lambda\, a\, d\phi = \vec{0}$$

$$Q_{11} = \int_0^{2\pi} (3a^2 \operatorname{Cos}^2\phi - a^2)\lambda\, a\, d\phi = \lambda\pi a^3 = \frac{q a^2}{2}$$

$$Q_{22} = \int_0^{2\pi} (3a^2 \operatorname{Sen}^2\phi - a^2)\lambda\, a\, d\phi = \lambda\pi a^3 = \frac{q a^2}{2}$$

$$Q_{33} = -Q_{11} - Q_{22} = -q a^2$$

$$Q_{12} = -Q_{21} = \int_0^{2\pi} 3a^2 \operatorname{Sen}^2\phi \operatorname{Cos}\phi\, d\phi = 0$$

$Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{33} = 0$; porque estamos considerando que el anillo está ubicado en el plano z = 0. Entonces:

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-q\,a^2)$$

$$\vec{r} \bullet \overleftrightarrow{Q}\,\vec{r} = q\,a^2 \left\{ \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \right\}$$

ó en coordenadas esféricas:

$$\vec{r} \bullet \overleftrightarrow{Q}\,\vec{r} = -q\,a^2 \left\{ r^2\,\frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\theta\ -\ 1)}{2} \right\} \qquad (**)$$

Reemplazando (*) y (**) en la ec.(31) obtenemos:

$$U(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{a^2}{2\,r^3}\,\frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1)}{2} \right\} \qquad (***)$$

Para comparar, recordemos la expresión exacta para puntos del eje z (ejemplo 4):

$$U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda\ a\ d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

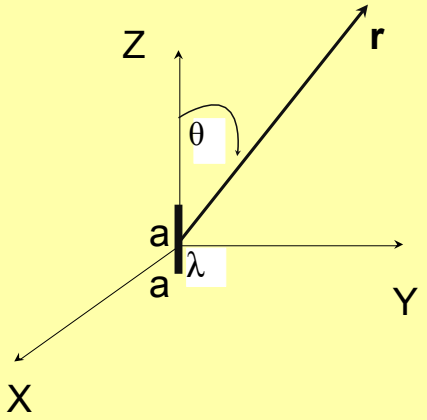
y la expansión de ésta como binomio de Newton es:

$$U(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,z} \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{a^2}{2z^3} + \ldots \right\},$$

que coincide con la expansión multipolar (***) cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $r = z$.

Ejemplo 10: Hallar el tensor momento cuadrupolar eléctrico de un alambre de longitud $2a$ y densidad de carga lineal λ. Halle también el potencial electrostático

Solución:



$$q = 2\,\lambda\,a$$

$$\vec{p} = 0$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \int_{-a}^{a} (-z^2)\,\lambda\,dz = \frac{q}{2a}\int_{-a}^{a} (-z^2)\,dz = -\frac{qa^2}{3}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \int_{-a}^{a} 3\,(x)\,(y)\,\lambda\,dz = 0$$

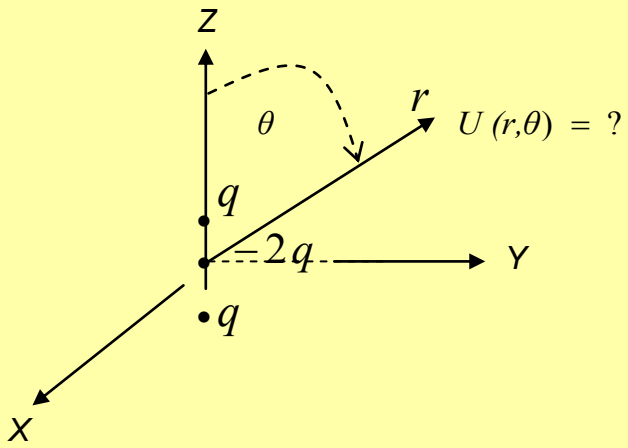
$$Q_{12} = Q_{21} = Q_{13} = Q_{31} = 0$$

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{2\,q\,a^2}{3}$$

$$U(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{q}{r} + \frac{2\,q\,a^2}{3}\frac{1}{2\,r^3}\frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\,\theta - 1)}{2} \right\}$$

Ejemplo 11: Hallar el tensor momento cuadrupolar eléctrico de una distribución discreta de carga constituida por una carga puntual $-2q$ en el origen, una carga q en (0, 0, d) y q en (0, 0, $-d$). Halle también el potencial electrostático

Solución:



$$q_{neta} = 0 \qquad \vec{p} = 0$$

$$Q_{11} = \sum_{j=1}^{3} q_j \left(3x_j^2 - r_j^2\right) = Q_{22} = -2q\,d^2$$

$$Q_{33} = Q_{zz} = 4q\,d^2$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{j=1}^{3} 3\,q_j\,x_j\,y_j = 0$$

$$Q_{12} = Q_{21} = Q_{13} = Q_{31} = 0$$

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(4q\,d^2\right)$$

$$U(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} + \frac{4\,q\,d^2}{2\,r^3}\frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1)}{2}\right\}$$

Cuadrupolo eléctrico de simetría axial: oblatos y prolatos

Obsérvese que los tensores momento cuadrupolar de las distribuciones de carga de los ejemplos 9 , 10 y 11 sólo tienen elementos no nulos en la diagonal. En la sección de problemas (problemas 50 y 51) se pueden ver distribuciones de carga cuyo momento cuadrupolar sí tiene componentes fuera de la diagonal.

En general, las distribuciones de carga simétricas con respecto al eje Z tienen tensor momento cudrupolar eléctrico diagonal y el tensor queda totalmente determinado solamente por el término Q_{zz}. Obsérvese también una diferencia de signos entre los elementos Q_{zz} de los momentos cuadrupolares de los ejemplos 9 y 10. Si una distribución de carga simétrica con respecto al eje *Z* se aproxima más a la distribución del ejemplo 9 diremos que tenemos una distribución tipo ***oblato*** y el valor de Q_{zz} es negativo. Si se aproxima más a la del ejemplo 10, el signo de Q_{zz} es positivo y diremos que tenemos una distribución tipo ***prolato.***

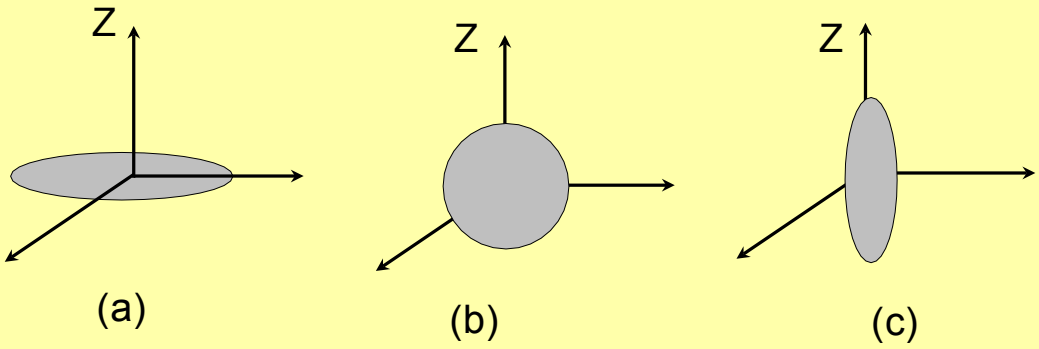


Fig. 23 Diferentes tipos de distribuciones de carga con simetría esférica (a) oblato, b) esférica (c) prolato

En ambos casos, prolato u oblato la contribución del momento cuadrupolar de una distribución de carga con simetría axial al potencial electrostático es:

$$U_4(r,\theta) = \frac{Q_{zz}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1)}{2} \qquad (32)$$

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES DE UN CUADRUPOLO AXIAL

Si en el resultado para el potencial eléctrico de un cuadrupolo axial (ec. 32) asignamos un valor constante al potencial eléctrico obtenemos una ecuación para una superficie equipotencial de la forma:

$$r^3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_{zz}}{2U}\,\frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1)}{2}$$

o, simplemente:

$$r = A\,(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1)^{1/3}$$

La figura 24 muestra la intersección de las superficies equipotenciales de un cuadrupolo axial con el plano que contiene el eje de simetría de la distribución de carga, generalmente identificado con el eje Z.

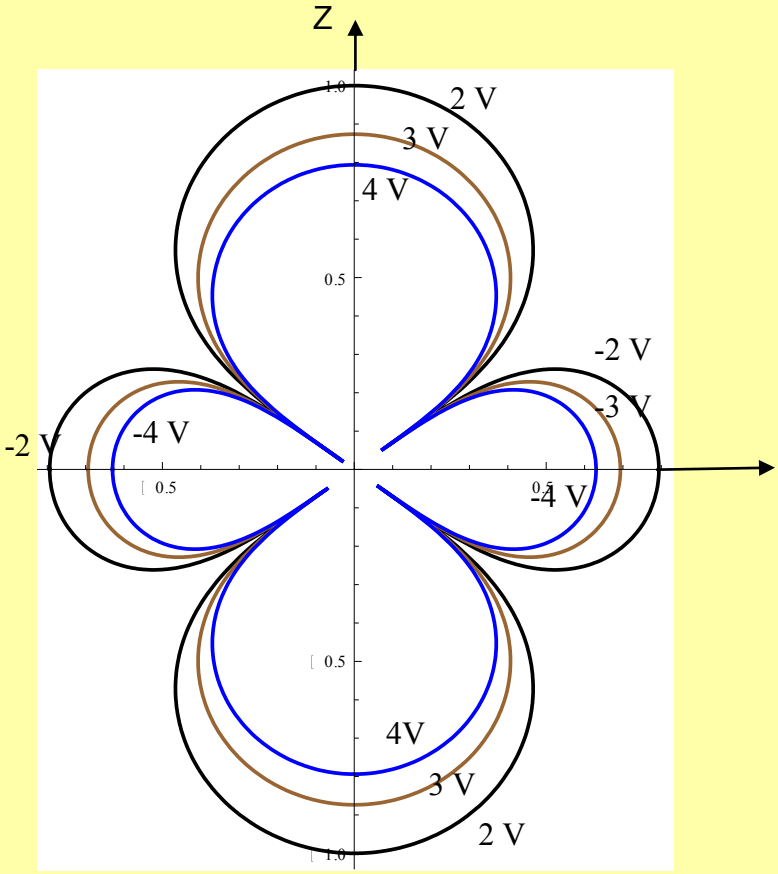


Fig. 24 Intersección de las superficies equipotenciales de un cuadrupolo axial con un plano que contiene al eje de simetría $Q_{zz} = 16\pi\varepsilon_0$ C m^2

LÍNEAS DE FUERZA DE UN CUADRUPOLO ELÉCTRICO AXIAL

Tomando el gradiente en coordenadas esféricas al potencial del cuadrupolo axial (ec. (32)) obtenemos :

$$E_r = \frac{3Q_{zz}}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(3\ \mathrm{Cos}^2\theta - 1)}{2\,r^4}\right\}$$

$$E_\theta = \frac{3\,Q_{zz}}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\mathrm{Cos}\,\theta\ \mathrm{Sen}\,\theta}{r^4}\right\}$$

Usando la definición de líneas de fuerza se consigue una ecuación diferencial para las líneas de fuerza:

$$\frac{dr}{r} = \frac{(3\,\mathrm{Cos}^2\theta\ -\ 1)\,d\theta}{2\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\mathrm{Sen}\theta}$$

e integrando se obtiene una ecuación finita para las líneas de fuerza de un cuadrupolo axial:

$$r = C_4\,\mathrm{Sen}\,\theta\ \mathrm{Cos}^{1/2}\theta$$

La figura 25 muestra algunas líneas de fuerza de un cuadrupolo con simetría axial.

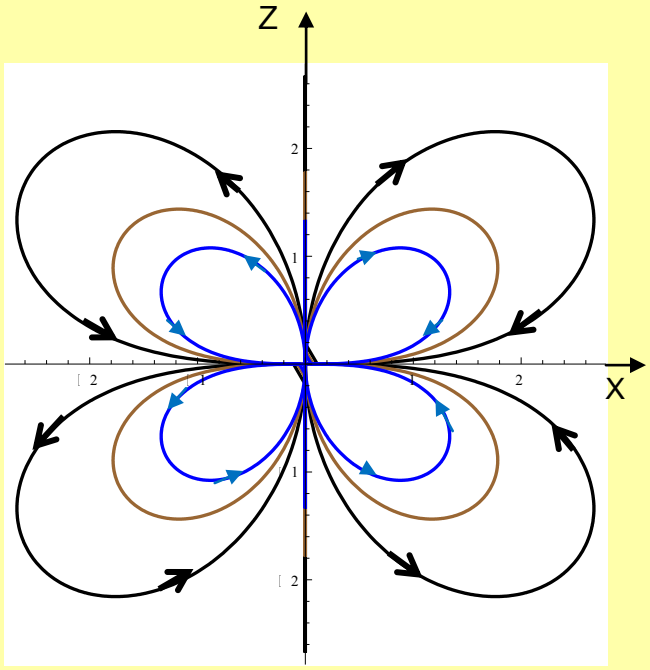


Fig. 25 Algunas líneas de fuerza de un cuadrupolo eléctrico con simetría respecto al eje Z.

2.9 CAMPO ELÉCTRICO PROMEDIO DENTRO DE UNA ESFERA

Consideremos ahora el siguiente problema: Dada una distribución arbitraria de carga (discreta o continua), tracemos imaginariamente una esfera de radio R que encierre a esta distribución de carga. ¿Cuál es el campo eléctrico promedio dentro de la esfera? Vamos a necesitar este resultado en el capitulo V cuando hablemos del campo eléctrico que un dieléctrico polarizado crea en puntos dentro del mismo dieléctrico.

Entendemos por campo eléctrico promedio a la cantidad:

$$\vec{E}_{prom.} = \left\langle \vec{E} \right\rangle = \frac{\iiint_{VR} \vec{E}\,(\vec{r})\; dV}{\iiint dV} \tag{33}$$

donde VR significa volumen de una esfera de radio R.

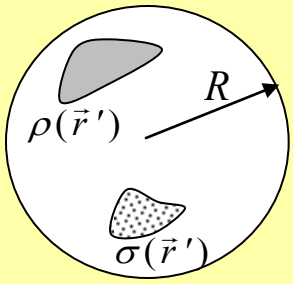


Fig. 26 Dada una distribución de cargas; hallar el campo promedio del campo eléctrico debido a ella, sobre una esfera de radio R.

Resolveremos en primer lugar el caso particular en que sólo tenemos dentro de la esfera dada una carga puntual q, a una distancia r' del centro. Llamando eje Z a la dirección que une el centro de la esfera con la posición de la carga q, podemos ver con ayuda de la figura 27 que la simetría permite establecer:

$$\left\langle \vec{E} \right\rangle = \langle E_z \rangle \hat{k} = \frac{\iiint_{VR} E_z\; dV}{\frac{4}{3}\pi R^3}\; \hat{k} \tag{33a}$$

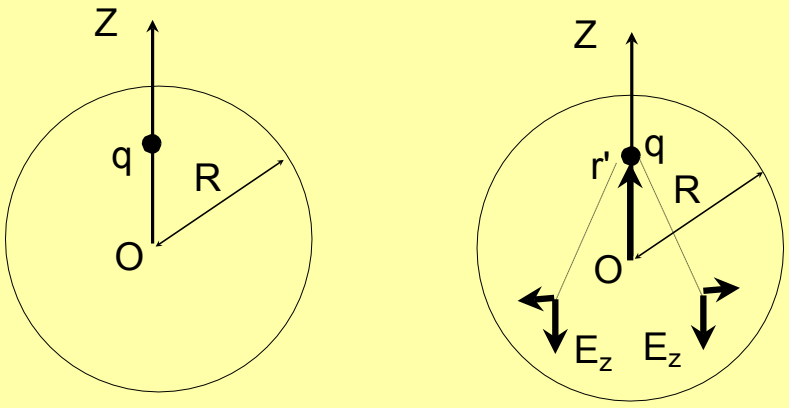


Fig. 27 El promedio del campo eléctrico debido a q sólo tiene componente z.

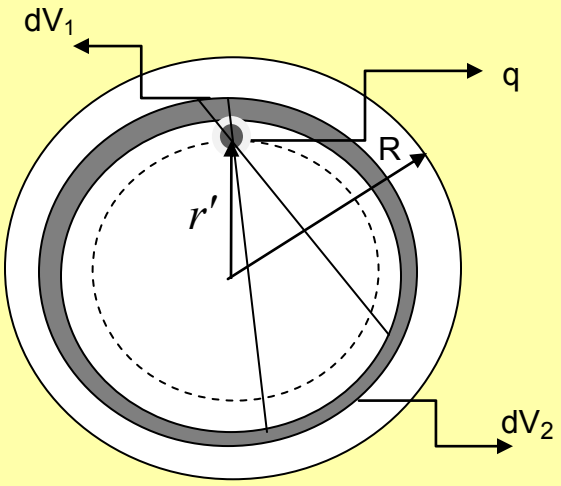
Nótese que la integral en la ec.(33a) es sobre el volumen de la esfera de radio R, pero observando la figura (28) y teniendo en cuenta que:

$$\vec{E}_1\, dV_1 \;=\; -\vec{E}_2\, dV_2$$

ó

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r_1^{\,2}}\, r_1^{\,2}\,\mathrm{Sen}\theta\, d\theta\; d\phi\; dr \quad = \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r_2^{\,2}}\, r_2^{2}\,\mathrm{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi\; dr$$

Podemos comprender que la integral sobre la esfera de radio R es igual a la integral sobre la esfera de radio r' :



$$\iiint_{V\,R} E_z\, dV' \;=\; \iiint_{V\,r'} E_z\, dV'$$

Fig. 28 La integral sobre esfera de radio *R* es igual que sobre esfera de radio *r*'

Lo que nos queda por hacer es evaluar la integral sobre el volumen de la esfera de radio r'. Para ello debemos tener en cuenta:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r''^{\,2}}\ \mathrm{Cos}\theta \qquad \text{y} \qquad dV = r''^{\,2}\mathrm{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dr'' \ ,$$

Además, hay que observar que la manera correcta de tomar los límites para evaluar la integral sobre la esfera de radio r' es:

$$\iiint_{V\,r'} E_z\, dV = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\ \mathrm{Sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{-2\,r'\,\mathrm{Cos}\,\theta} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{Cos}\,\theta\, dr''$$

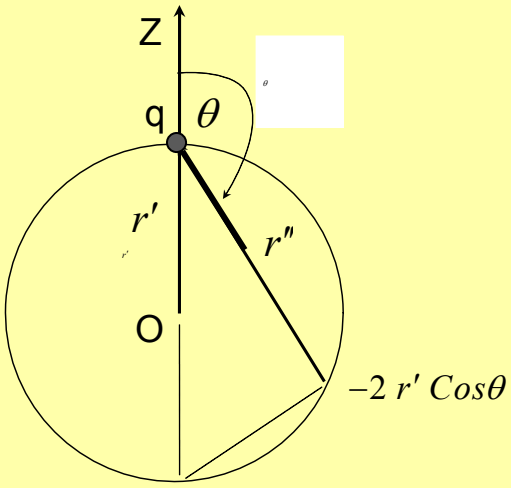


Fig. 29. La variable r'' varía entre los límites: cero y $-2\,r'\,\mathrm{Cos}\,\theta$. La variable θ entre $\pi/2$ y π.

El resultado de evaluar esta integral es:

$$\iiint_{V\,r'} E_z\, dV = -\frac{q\,r'}{3\varepsilon_0}$$

Por lo tanto el campo eléctrico promedio en la esfera de radio R, debido a una carga q en su interior es, de acuerdo con la ec.(33a):

$$\left\langle \vec{E}(\vec{r}\,) \right\rangle = \frac{-\,q\,r'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\hat{k}$$

que, recordando la definición de momento dipolar (ecs. 22), podemos entonces concluir que:

$$\vec{E}_{prom} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad (34)$$

NOTA: Este resultado es válido para cualquier carga puntual ó elemento de carga $\lambda d\ell'$, $\sigma da'$, $\rho dV'$, dentro de la esfera de radio R, por lo tanto, teniendo en cuenta el principio de superposición, podemos ver que su validez se extiende a cualquier distribución de carga dentro de la esfera. En ese caso $\vec{p}$ vendría a ser el momento dipolar de toda la distribución de carga dentro de la esfera de radio R.

2.10 POTENCIAL DE TIERRA

1. Si conectamos un conductor de carga Q_1 y potencial U_1 a otro conductor, con carga Q_2 y potencial U_2, tendremos una redistribución de cargas hasta que el potencial de ambos conductores sea el mismo. Ver figura 30.

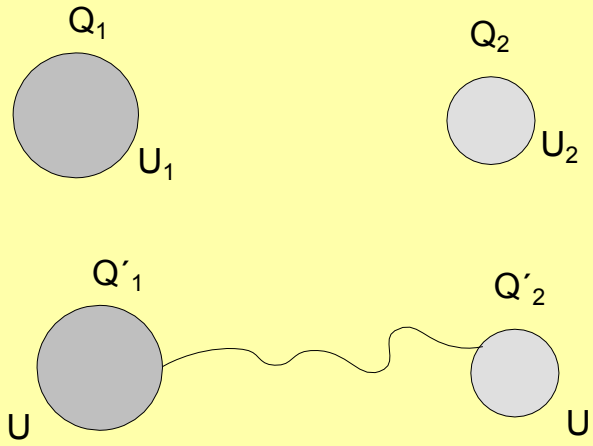


Fig. 30 Al conectar dos conductores ambos adquieren el mismo potencial pero sus cargas son en general diferentes.

2. Consideremos Tierra como un conductor esférico muy grande $(R \to \infty)$. Para valores de cargas comunes en electrostática (microcoulomb a lo más) el potencial de este gran conductor esférico es aproximadamente cero:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx 0$$

3. Cualquier conductor conectado al gran conductor esférico, Tierra, tomará de (o cederá a) Tierra las cargas necesarias para que el potencial de ambos sea igual. En tierra quedará entonces una cantidad de carga de orden de magnitud "habitual en Electrostática", pero según lo expresado en el punto 2, su potencial podemos seguir considerándolo nulo. Luego: **El potencial de cualquier punto conectado a Tierra es CERO.**

   3a. Si un conductor C, con carga inicial q, alrededor del cual no hay otras cargas, se conecta a Tierra entonces al final su carga es cero.

   3b. Si un conductor C, inicialmente neutro, alrededor del cual hay uno o varios objetos cargados, se conecta a Tierra sucede lo siguiente: C y Tierra forman un solo gran conductor neutro y debido a la presencia de q cerca del conductor C las cargas del "gran conductor" (C + Tierra) se redistribuyen de tal manera que en C hay cargas de signo opuesto a q y en Tierra cargas del mismo signo de q pero muy alejadas (ver figura 31). *El conductor C conectado a Tierra y por lo tanto a potencial cero, tiene entonces carga neta no nula.*

Hemos explicado así que en un conductor conectado a Tierra siempre el potencial es nulo pero la carga neta no es necesariamente nula.

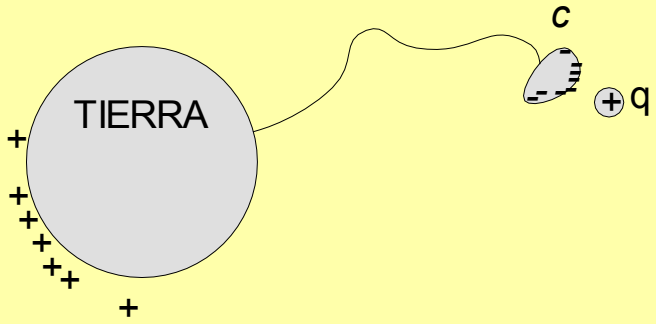


Fig. 31 Un conductor conectado a tierra tiene potencial cero pero su carga puede ser diferente de cero

PROBLEMAS

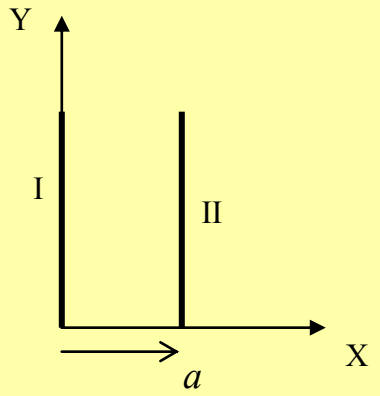
1. Dos cargas puntuales q' y $-q'$ están sobre el eje X con coordenadas a y $-a$ respectivamente. Hallar la fuerza total sobre la carga q situada en un punto arbitrario en el plano *XY*.

2. Sobre un cuadrado de lado "a" en el plano *YZ* que tiene un vértice en el origen de coordenadas y lados paralelos a los semiejes positivos, se coloca en cada vértice una carga q'. Una carga puntual q se ubica en el eje *X* a una distancia "b" del origen. Hallar la componente *x* de la fuerza que actúa sobre q.

3. Una esfera de radio R con densidad volumétrica de carga uniforme ρ tiene su centro O a una distancia $\ell > R$ de una carga puntual q. Hallar la fuerza sobre la carga puntual, (a) usando un sistema de coordenadas en que Oq define el eje *Z*. (b) en un sistema de coordenadas en el que el centro de la esfera se encuentre en (0, 0, b) y la carga puntual en (0,y,0).

4. Se tiene una línea cargada de longitud L y densidad de carga uniforme λ ubicada a lo largo del eje *Z* con sus extremos en $z = z_o$ y $z = z_o + L$. Hallar la fuerza sobre esta línea debida a una distribución esférica y uniforme de carga con centro en el origen y radio "a" ($a < z_o$).

5. Dos líneas de carga de igual longitud **L**, paralelas y dispuestas en el plano *XY* como se muestra en la figura tienen cada una densidad lineal de carga uniforme λ. Hallar la fuerza que la línea II experimenta debido a la línea I.



6. Si la línea I del problema anterior tiene ahora una densidad de carga no uniforme dada por la expresión: $\lambda = A y^2$ siendo A una constante. (a) ¿Cuáles son las unidades de A?; (b) ¿Cuál es la carga total en la línea I? (c) Halle la fuerza que la línea I ejerce sobre una carga puntual q ubicada en el punto $(a, 0, 0)$.

7. Sobre un disco de radio R en el plano *XY* con centro en el origen se tiene una distribución superficial de carga descrita por la expresión: $\sigma = a\rho^2$, donde a es una constante. (a) Determine las unidades de a, (b) Halle la carga total sobre el disco, (c) Halle la fuerza producida por esta distribución de carga sobre una carga puntual q ubicada en el eje Z.

8. Encontrar la fuerza electrostática sobre un alambre con densidad lineal de carga uniforme λ debida a un disco uniformemente cargado con densidad σ. El alambre es de longitud L, perpendicular al disco y toca a este en su centro.

9. Considere una distribución de carga lineal y uniforme, λ, de longitud $2L$. Calcular el campo eléctrico en un punto A = $(x, 0, 0)$ en la misma recta del segmento cargado y en un punto B = $(0, y, 0)$ sobre una recta perpendicular al segmento cargado y que pasa por su centro.

10. ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro de un cascarón esférico de radio R si la mitad de su superficie tiene densidad superficial de carga uniforme σ y la otra mitad 2σ?

11. Una placa conductora infinita tiene densidad superficial de carga uniforme σ. Demostrar que la mitad del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto situado a d metros de la superficie de la placa se debe a la carga ubicada en la placa dentro de un circulo de radio $\sqrt{3}\,d$.

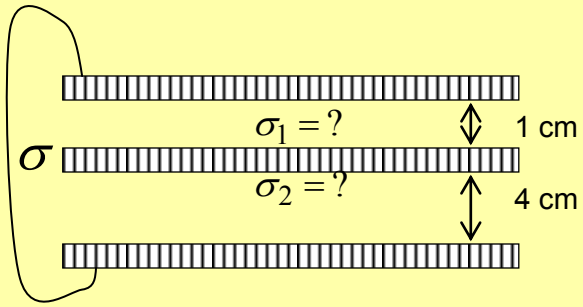
12. Un cilindro circular recto de radio R está orientado a lo largo del eje *Z*. Tiene densidad volumétrica de carga dada por la expresión :

$$\rho(z) = \rho_O + \beta z$$

con respecto a un origen en el centro del cilindro. Encontrar la fuerza sobre una carga puntual q colocada en el centro del cilindro. Altura del cilindro: L.

13. Considere la siguiente distribución discreta de cargas: q : (0,0) ; 2q : (0,a) ; 3q : (a,0) ; 4q : (a, a). Determine el potencial electrostático en el centro del cuadrado. ¿Podría Ud. determinar $\vec{E}$ a partir del valor de U que acaba de encontrar? ¿Por qué?

14. Tres placas conductoras se colocan paralelas entre sí como se indica en la figura. Las placas exteriores se conectan con un hilo conductor. La placa intermedia está aislada y contiene una densidad superficial de carga total σ = 10 Coul/m^2 ¿En qué proporción se repartirá esta carga en las dos caras de la placa interior?



15 En la región comprendida entre dos cilindros coaxiales de longitud infinita, de radios R y 3R, existe una distribución volumétrica de carga dada por la expresión:

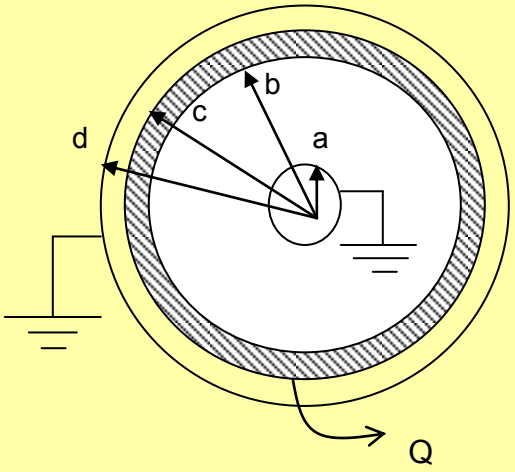
$$\rho(z) = \rho_0 \frac{r}{2R}$$

donde r es la distancia desde cualquier punto al eje común de los cilindros. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las superficies cilíndricas de radios R y 3R?

16 Tres cáscaras esféricas concéntricas se disponen como se muestra en la figura. Los conductores externos e internos están a potencial cero y el intermedio tiene carga neta Q :

a) Determine el potencial en cualquier punto del espacio y grafique U vs. r desde r = 0 hasta ∞.

b) Encontrar las fracciones de carga Q que van a las superficies $r = b$ y $r = c$ del conductor intermedio.



17. Dado un disco de radio a con densidad superficial de carga expresada por;

$$\sigma = b\frac{\mathrm{Cos}^2\phi}{r}$$

donde b es una constante, determine el campo eléctrico en cualquier punto del eje del disco. (a) Usando la ec. (9); (b) Hallando primero el potencial.

18. Una distribución esférica de carga está dada por la expresión:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{a}\right) & ; \quad r < a \\ 0 & ; \quad r > a \end{cases}$$

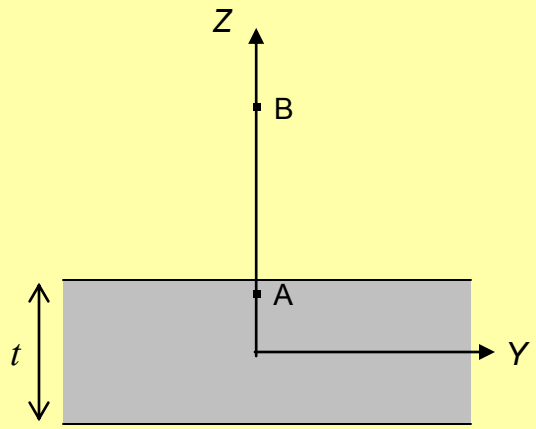
a) Calcular la carga total Q.

b) Encontrar el campo eléctrico E y el potencial electrostático U fuera de la distribución de carga.

c) Encontrar E y U dentro de la distribución.

d) Demostrar que el máximo valor de E se produce cuando r = 0.745a.

19. La región comprendida entre dos planos paralelos infinitos separados por una distancia *t*, como se muestra en la figura, contiene densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Calcular las fuerzas F_A y F_B sobre una carga puntual Q cuando ella se coloca en el punto A(0, 0, z_1) y luego en B(0, 0, z_2) respectivamente.



20. Dada la siguiente distribución volumétrica de carga:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\, e^{x/a} & ; \quad x < a \\ 0 & ; \quad x > a \end{cases}$$

Determinar el potencial electrostático en cualquier punto del espacio.

21. El espacio entre dos superficies esféricas concéntricas de radios R_1 y R_2 está lleno con una distribución de carga: $\rho(r)$, siendo r la distancia al centro común de las esferas. Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ y el potencial electrostático U en cualquier punto del espacio.

22. Un bloque infinito, limitado por las superficies $x = \pm a$, está cargado simétricamente respecto a su plano medio (x = 0). La densidad volumétrica de carga es:

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{a} \left| x \right|$$

a) Hallar el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Tomando como referencia $U(x=0) = 0$, encontrar el potencial en cualquier punto del espacio.

23. Encontrar el campo eléctrico dentro de un cilindro infinitamente largo de radio a y con densidad volumétrica uniforme de carga ρ. Encontrar también el potencial electrostático.

24. Una placa infinita tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. Junto a ella y de forma paralela hay una capa ilimitada y de espesor d y densidad volumétrica de uniforme de carga ρ. Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto del espacio.

25. Se tiene una esfera conductora de radio R_1 concéntrica con un cascarón esférico conductor de radios R_2 y R_3 respectivamente ($R_1 < R_2 < R_3$). Si la esfera interna está a un potencial U_0 y el cascarón esférico tiene carga neta Q. Calcule el potencial electrostático $U(r)$ en cualquier punto del espacio.

26. Entre dos superficies cilíndricas coaxiales de longitud infinita, de radios a y b ($b>a$) existe una distribución volumétrica de carga dada por la expresión:

$$\rho(r) = A\, r^n$$

donde A y n son constantes, mientras r es la coordenada cilíndrica. Hallar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

27. a) Considere el problema anterior pero usando la distribución volumétrica de carga dada por la expresión:

$$\rho(r) = A\, e^{-\alpha r}$$

donde α es una constante.

b) ¿En qué circunstancias los resultados de los problemas (26) y (27a) coinciden?

28. Una superficie esférica de radio a tiene densidad superficial de carga uniforme σ. Hallar $U(r)$ para todos los puntos dentro y fuera de la esfera usando la ec.(13).

29. Usando las ecuaciones (19) del texto, hallar el potencial electrostático debido a una esfera de radio R con densidad uniforme de carga ρ.

30. Una esfera de radio a tiene carga total Q distribuida uniformemente en su volumen. El centro de la esfera está en el punto (x_o, y_o, z_o). Hallar el potencial electrostático y el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

31. Una distribución esférica de carga está dada por la expresión:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\left(1-\dfrac{r}{a}\right) & ; \quad r < a \\ 0 & ; \quad r > a \end{cases}$$

a) Calcular la carga total.

b) Calcular el campo eléctrico en la región $r < a$.

c) Calcular el potencial electrostático, $U(r)$, en la región $r < a$.

d) ¿Para qué valor de r el campo eléctrico toma el valor máximo?

32. Una esfera de radio a tiene una densidad de carga que varía con el radio según la expresión:

$$\rho(r) = A\, r^n$$

Donde A es una constante y $n > 0$. Hallar U en todos los puntos interiores y exteriores a la esfera. Use la expresión (13) y exprese sus resultados en función de la carga total Q.

33. Una esfera de radio R tiene una distribución volumétrica de carga dada por:

$$\rho(r) = A\, r^5$$

donde A es una constante. Calcule el flujo eléctrico a través de un círculo de radio R tangente a la esfera.

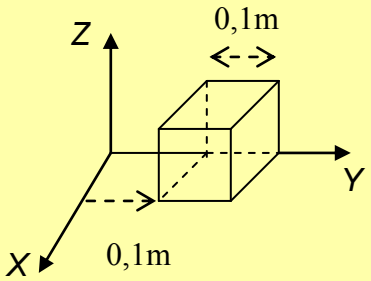
34. Si una carga puntual q está en el centro de un cilindro recto de radio a y altura $2h$. ¿Cuál es el flujo de $\vec{E}$

a) a través de cada una de las tapas?

b) a través de la superficie lateral?

c) Repetir las preguntas anteriores para el caso en que la carga q se encuentre en el centro de una de las tapas del cilindro.

35. Las tres componentes del campo eléctrico existente en una región son: $E_x = 10^3\, x^{1/3}$, $E_y = 0$, $E_z = 0$ (E_x está expresado en N/C y x en metros). Calcúlese la carga neta del cubo mostrado en la figura.



36. a) Calcular el flujo eléctrico a través de un circulo de radio a debido a una carga eléctrica q colocada sobre su eje y a una distancia z respecto al centro del disco. b) Sean $q_1 = 1.6 \times 10^{-19}$C y $q_2 = -q_1$ dos cargas fijas en puntos que distan entre si 2,0 $\mathring{\text{A}}$ y sea C_1 un disco de 2,0 $\mathring{\text{A}}$ de diámetro centrado en el centro del segmento que une q_1 y q_2. Calcule el flujo eléctrico a través de C_1. Nota: El segmento es perpendicular al disco.

37. Sabiendo que la expresión para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\vec{r}}{r^3}(1+br)\,e^{-br}$$

donde q y b son constantes positivas y r la distancia al origen de coordenadas. Determinar como se distribuye la carga que ha engendrado este campo. ¿Cuál es la carga total Q?

38. ¿Es posible que el vector $\vec{E} = (yz-2x)\,\hat{i} + xz\,\hat{j} + xy\,\hat{k}$ sea un campo eléctrico? Si es así, hallar el potencial $U(\vec{r})$ de donde se pueda obtener el campo vectorial dado.

39. El campo promedio en la atmósfera terrestre, según se ha encontrado experimentalmente, está dado por:

$$\vec{E} = -E_0\,(A\,e^{-\alpha z} + B\,e^{-\beta z})\,\hat{k}$$

Siendo todas las constantes empíricas positivas y z la altura sobre el plano local. Hallar la densidad de carga promedio en la atmósfera como función de la altura.

40. El campo eléctrico axial E_z en el eje del tubo de un tipo particular de acelerador de iones está dado aproximadamente por:

$$E_z = E_{z0} + Kz^2$$

donde z se mide a partir del centro del tubo a lo largo de su eje. La componente azimutal E_ϕ es cero.

a) Demostrar que el campo eléctrico radial (paralelo a $\hat{e}_\rho$) en la vecindad del eje es: $E_\rho = -K\,z\,r$, asumiendo que la densidad de carga es cero.

b) ¿Cuál es la máxima densidad de carga que puede ser tolerada si el valor calculado aproximadamente para el campo radial tiene que ser exacto dentro del 5% en los extremos del tubo? El tubo acelerador tiene un metro de longitud, E_{z0} es 7.5 x 10^5 voltios/m , y K es 1.0 x 10^6 voltios/m^3.

41. Determinar la distribución de carga que origina los siguientes campos:

a) $$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{3\,r^3}{5\,\varepsilon_0}\,\hat{e}_r & ; \quad r < R \\ \dfrac{3\,R^5}{5\,\varepsilon_0\,r^2}\,\hat{e}_r & ; \quad r > R \end{cases}$$

b) $$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & ; \quad r < R \\ (c/r)\,\hat{e}_\rho & ; \quad r > R \end{cases}$$

En parte b) del problema: c es constante y r es la coordenada cilíndrica ρ .

42. ¿Es posible que en una región donde no hay carga eléctrica el campo eléctrico esté dado por la expresión:

a) $\vec{E}_0$, b) $(\vec{b}\bullet\vec{r})\,\vec{a}$, c) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{r})$, d) $\vec{b}\bullet\vec{r}$, e) $(\vec{a}\bullet\vec{r})\,(\vec{k}\times\vec{r})$,

f) $\vec{r}\times(\vec{c}\bullet\vec{r})$? donde $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,,\vec{k}$ son vectores constantes.

43. Un campo eléctrico $\vec{E}$, en coordenadas cilíndricas, se expresa así:

$$\vec{E}_1 = 0 \quad , \quad r < 1\ \text{m}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1000}{3}\,r^2\,\hat{e}_\rho \quad , \quad 1\ \text{m} < r < 2\ \text{m}$$

$$\vec{E}_3 = 0 \quad , \quad r > 2\ \text{m}$$

donde $\vec{E}$ se expresa en V/m y r (distancia al eje de los cilindros) en metros. Determine las densidades de carga volumétricas (ρ) y/o superficiales (σ) y/o filiformes (λ) que producen este campo.

Sugerencia: Verifique que las densidades de carga obtenidas producen efectivamente los campos dados.

44. Dado el siguiente campo eléctrico, expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 (r/a) \hat{e}_\rho & ; \quad 0 < r < a \\ 0 & ; \quad r > a \end{cases}$$

Hallar la distribución de carga que lo genera.

45. Demuestre que el torque que actúa sobre un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$ es:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{ext} + \vec{p} \times \vec{E}_{ext}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición del dipolo respecto al punto tomado como centro de torque.

46. Computar el momento dipolar eléctrico de una cáscara esférica con densidad superficial de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, donde θ es el ángulo polar o el ángulo que hace el vector posición con el eje z.

47. En los vértices de un cuadrado de lado 2a centrado en el origen y en el plano *XY* se encuentran cuatro dipolos eléctricos iguales de momento dipolar $\vec{p}$ paralelo al eje *Z*. Hallar el campo eléctrico en un punto del eje *Z* muy alejado del plano *XY*.

48. Una circunferencia de radio R está constituida de dos mitades cargadas uniformemente y con signos opuestos.

a) Determinar el momento cuadrupolar eléctrico.

b) Encontrar el potencial electrostático $U(r)$ en puntos muy alejados de la circunferencia, es decir, $r >> R$.

49. Un hemisferio de radio R que tiene una carga neta Q distribuida uniformemente en su superficie está elevado sobre el plano *XY*. Tomando como origen de coordenadas el centro de curvatura del hemisferio, calcular:

a) el potencial electrostático $U(r)$ usando la ec.(13)

b) el momento dipolar eléctrico.

c) el momento cuadrupolar eléctrico.

d) la aproximación multipolar del potencial electrostático, hasta orden cuadrupolar.

50. La densidad lineal de carga de un anillo de radio a está dado por:

$$\lambda = \frac{q}{a}(\mathrm{Cos}\phi + \mathrm{Sen}\,2\phi)$$

Se pide:

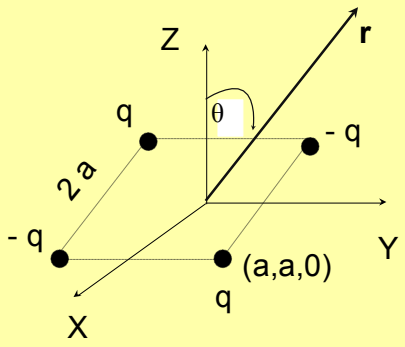
a) El momento monopolar.

b) el momento dipolar.

c) el momento cuadrupolar.

d) la aproximación multipolar del potencial electrostático en cualquier punto del espacio.

51. Hallar el tensor momento cuadrupolar eléctrico de la distribución de cargas mostrada en la figura. Halle también el potencial eléctrico



CAPITULO 3

ELECTROSTÁTICA Y CONDICIONES DE FRONTERA

3.1 INTRODUCCIÓN

Muchas veces en electrostática se presenta el siguiente problema: Conociendo el potencial electrostático, $U(\vec{r})$, en la superficie frontera de una región $\Re$; hallar el potencial en cualquier punto de la región $\Re$. Este se conoce como *Problema de Dirichlet*.

Otras veces en lugar de tener como dato $U(\vec{r})$ en la frontera de $\Re$ se conoce allí la derivada de U en la dirección normal a la superficie de la frontera $(\vec{\nabla}U \bullet \hat{n})$. Si hallamos $U(\vec{r})$ para cualquier punto de $\Re$ se dice que estamos resolviendo el *Problema de Neumann*.

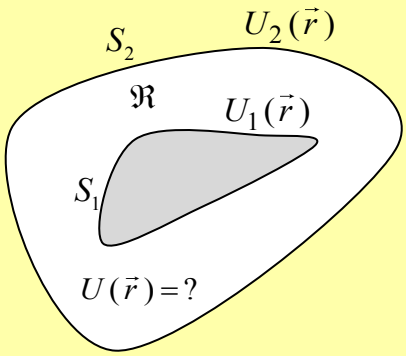


Fig. 1a Problema de Dirichlet

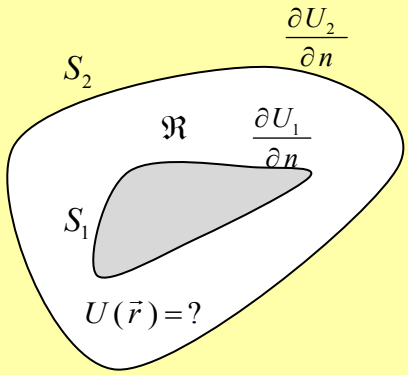


Fig. 1b Problema de Neumann

Si en la región $\Re$ existe una distribución volumétrica de carga $\rho(\vec{r})$, el problema de encontrar el potencial electrostático consiste en buscar la solución a la ecuación de Pöisson,

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

que satisfaga las condiciones de frontera dadas como dato (de Dirichlet o de Neumann según el caso).

Nos dedicaremos en este capítulo principalmente a los casos en que la carga eléctrica que produce el campo eléctrico (y por lo tanto el potencial) está distribuida en la superficie frontera o fuera de la región, es decir, casos en que para cualquier punto de la región $\Re$, $\rho(\vec{r}) = 0$. En este caso el problema de hallar el potencial electrostático $U(\vec{r})$ consiste en buscar la solución a la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 U = 0 \tag{2}$$

que satisfaga las condiciones de frontera dadas como dato (de Dirichlet o de Neumann según el caso).

De acuerdo a la geometría de las superficies frontera que se nos presenta convendrá escribir la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{2a}$$

en coordenadas cartesianas;

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{Sen}\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{Sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \tag{2b}$$

en coordenadas esféricas; ó

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{2c}$$

en coordenadas cilíndricas, o en cualquier otro sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Antes de comenzar a resolver problemas más específicos conviene recordar las dos siguientes propiedades fundamentales de las soluciones a la ecuación de Laplace:

Teorema de Linealidad: Si cada una de las funciones: $U_1, U_2, \ldots, U_n$ es solución a la ecuación de Laplace: y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias entonces:

$$U = C_1U_1 + C_2U_2 + \ \ldots \ + C_nU_n$$

es también solución a la ecuación de Laplace.

PRUEBA

$$\nabla^2 (C_1U_1 + C_2U_2 + \ldots + C_nU_n) = \nabla^2 (C_1U_1) + \nabla^2 (C_2U_2) + \ldots =$$

$$C_1\nabla^2 U_1 + C_2\nabla^2 U_2 + \ldots + C_n\nabla^2 U_n = 0 \qquad \text{....L.q.q.d.}$$

Teorema de Unicidad: Si U_1 y U_2 son soluciones a la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de Dirichlet entonces:

$$U_1(\vec{r}) = U_2(\vec{r}) \quad , \quad \text{para todo} \quad \vec{r} \in \Re$$

y si satisfacen las mismas condiciones de Neumann entonces U_1 y U_2 difieren entre sí a lo más en una constante aditiva es decir:

$$U_1(\vec{r}) - U_2(\vec{r}) = \text{cte} \quad \text{para todo} \quad \vec{r} \in \Re$$

PRUEBA

Supongamos que S_1 y S_2 conforman la frontera de la región $\Re$ donde queremos hallar el potencial. Que U_1 y U_2 satisfacen las condiciones de frontera de Dirichlet significa:

$$U_1(\vec{r}) = U_2(\vec{r}) \quad ; \quad \text{para todo} \quad \vec{r} \in S_1 \quad \text{ó} \quad \vec{r} \in S_2$$

y que U_1 y U_2 satisfacen las condiciones de Neumann significa que:

$$\frac{\partial U_1(\vec{r})}{\partial n} = \frac{\partial U_2(\vec{r})}{\partial n} \quad , \qquad \text{para todo} \quad \vec{r} \in S_1 \quad \text{ó} \quad \vec{r} \in S_2$$

Definiendo:

$$\Phi(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) - U_2(\vec{r}) \quad , \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Re$$

vemos que:

$\Phi(\vec{r}) = 0$, para todo $\vec{r}$ en S_1 ó en S_2, en caso de Dirichlet.

y

$\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \bullet \hat{n} = 0$, para todo $\vec{r}$ en S_1 ó en S_2, en caso de Neumann.

En cualquier caso tendremos:

$$\oiint_{S_1 \cup S_2} \left\{\Phi(\vec{\nabla}\Phi)\right\} \bullet \hat{n}\, da = 0$$

la cual, usando el teorema de la divergencia, se puede escribir:

$$\iiint_V \operatorname{div}\left\{\Phi(\vec{\nabla}\Phi)\right\} dV = 0$$

y usando la identidad vectorial: $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}\vec{F} + \vec{F} \bullet \operatorname{grad} f$, tenemos:

$$\iiint_V \Phi\ (\nabla^2\Phi)\, dV + \iiint_V \left|\vec{\nabla}\Phi\right|^2 dV = 0$$

Por teorema de linealidad sabemos que:

$$\nabla^2(U_1 - U_2) = \nabla^2\Phi = 0$$

luego:

$$\iiint_V \left|\vec{\nabla}\Phi\right|^2 dV = 0$$

Pero $\left|\vec{\nabla}\Phi\right|^2$ nunca es negativo, la igualdad anterior implica entonces:

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{0}$$

lo cual significa:

$$\Phi(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) - U_2(\vec{r}) = \text{cte.} \quad \text{para todo } \vec{r} \in \Re$$

Esta constante queda determinada por su valor en la frontera: CERO, en el caso del problema de Dirichlet. Luego:

$U_1(\vec{r}) = U_2(\vec{r})$; para todo $\vec{r} \in \Re$ en el caso de *Dirichlet*. (L.q.q.d.)

Y en el caso de *Neumann*, sólo podemos decir que $U_1(\vec{r})$ y $U_2(\vec{r})$ se diferencian en una constante en todos los puntos de la región.

3.2 PROBLEMAS CON UNA VARIABLE

EJEMPLO 1 (EN COORDENADAS CARTESIANAS): Dos placas conductoras paralelas e infinitas están separadas una distancia d. El potencial electrostático de una de ellas es U_0 y el de la otra $U_0 + \Delta U$.

Dar una expresión para:

a) el potencial electrostático entre las placas,

b) el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas.

c) la densidad superficial de carga en cada placa.

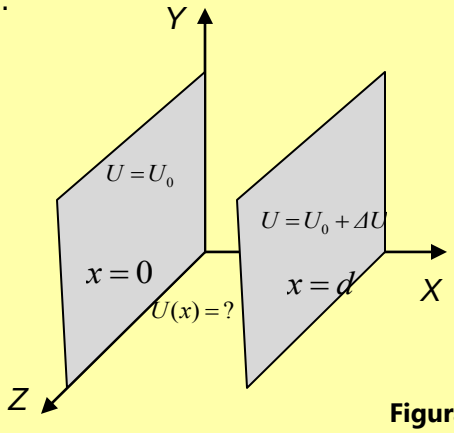


Figura 2.

Solución: Véase la figura 2 junto al enunciado

Puesto que las placas son infinitas, a partir de cualquier punto P entre las placas podemos desplazarnos en cualquier dirección paralela al plano *YZ* y es como si no nos moviéramos (hay simetría traslacional). Por lo tanto U no depende de la coordenada y ni de z. La ecuación de Laplace se reduce entonces a:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

cuya solución general es:

$$U(x) = Ax + B$$

En este problema de Dirichlet las condiciones de frontera se pueden escribir:

$$U(x=0) = U_0$$

$$U(x=d) = U_0 + \Delta U$$

Se encuentran entonces los siguientes valores para las constantes:

$$A = \frac{\Delta U}{d} \quad \text{y} \quad B = U_0$$

La expresión para el potencial es entonces:

a) $$\boxed{U(x) = \frac{\Delta U}{d} x + U_0}$$

b) Para calcular el campo eléctrico, tomamos el gradiente del potencial:

$$\vec{E}(x) = -\frac{\Delta U}{d}\hat{i}$$

Recordando que para superficies conductoras:

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \bullet \hat{n}$$

c) $$\sigma\big|_{x=0} = -\varepsilon_0 \frac{\Delta U}{d} \qquad \text{y} \qquad \sigma\big|_{x=d} = \varepsilon_0 \frac{\Delta U}{d}$$

EJEMPLO 2 (EN COORDENADAS ESFERICAS):

Una esfera conductora de radio a y un cascarón esférico de radios b y c ($a < b < c$) están dispuestas concéntricamente y sus valores de potencial son: U_a y U_b respectivamente. Encontrar:

i) el potencial electrostático en todo punto del espacio.
ii) el campo eléctrico
iii) las densidades superficiales de carga que producen el campo.

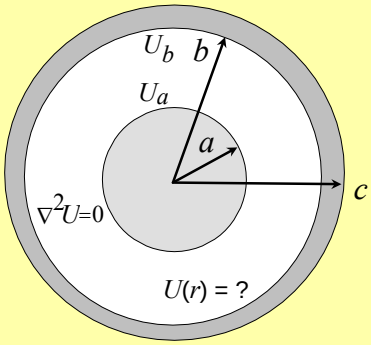


Figura 3.

Solución:

En las regiones $r < a$ y $b < r < c$, que están ocupadas por conductores, el potencial es uniforme y tiene los valores U_a y U_b respectivamente.

Las regiones de interés son entonces: $a < r < b$ y $r > c$. En ellas no hay distribución volumétrica de carga y se verifica la ecuación de Laplace, que debemos escribir en coordenadas esféricas (ec.(2b)). Podemos establecer a priori que U no depende de las coordenadas angulares y que basta escribir la ec.(2b) en la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

cuya solución general es:

$$U(r) = \frac{A}{r} + B$$

Para la región a < r < b tenemos las condiciones de frontera:

$$U(r=a) = U_a = \frac{A}{a} + B$$

$$U(r=b) = U_b = \frac{A}{b} + B$$

de donde deducimos los siguientes valores para las constantes A y B :

$$A = \frac{U_a - U_b}{b-a}\,a\,b \quad ; \quad B = \frac{U_b\,b - U_a\,a}{b-a}$$

obteniendo, por lo tanto, para el potencial:

$$U(r) = \frac{(U_a - U_b)}{(b - a)}\,\frac{a\,b}{r} + \frac{U_b\,b - U_a\,a}{b - a} \quad ; \quad a < r < b$$

Para la región $r > c$ tenemos las condiciones de frontera:

$$U(r=c) = U_b = \frac{A}{c} + B$$

$$U(r\to\infty) = 0 = \frac{A}{\infty} + B$$

de donde deducimos los siguientes valores para las constantes A y B:

$$A = U_b\,c \quad ; \quad B = 0$$

obteniendo por lo tanto:

$$U(r) = \frac{U_b\,c}{r} \quad ; \quad r > c$$

El campo eléctrico en cada región se halla tomando el gradiente al respectivo potencial. Los resultados son:

$$\vec{E}(r) = \frac{(U_a - U_b)}{(b-a)}\,\frac{a\,b}{r^2}\,\hat{e}_r \quad ; \quad a < r < b$$

$$\vec{E}(r) = \frac{U_b\,c}{r^2}\,\hat{e}_r \quad ; \quad r > c$$

Las densidades superficiales de carga son:

$$\sigma\big|_{r=a} = \varepsilon_0 \frac{U_a - U_b}{b-a}\frac{b}{a} \quad ; \quad \sigma\big|_{r=b} = -\varepsilon_0 \frac{U_a - U_b}{b-a}\frac{a}{b}$$

$$\sigma\big|_{r=c} = \varepsilon_0 \frac{U_b}{c}$$

Nótese que para calcular la densidad superficial de carga hemos usado en los tres casos: $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \bullet \hat{n}$. Siendo $\hat{n} = \hat{e}_r$ cuando $r = a$ y cuando $r = c$, pero $\hat{n} = -\hat{e}_r$ en la superficie $r = b$.

Obsérvese también que la carga total en las esferas $r = a$ y $r = b$ tienen el mismo valor pero signos contrarios, lo cual está de acuerdo con el resultado de la ley de Gauss, que el campo eléctrico en la región $b < r < c$ es nulo.

EJEMPLO 3 (EN COORDENADAS CILINDRICAS):

Dos superficies cilíndricas conductores, coaxiales y de longitud infinita tienen radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y valores de potencial U_1 y U_2 respectivamente.

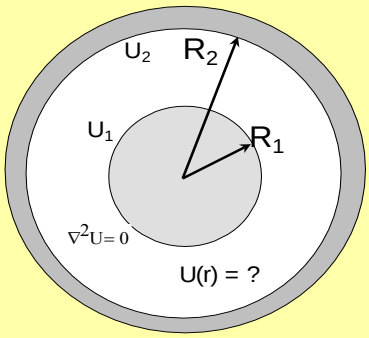


Figura 4.

a) Halle $U(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$ en cualquier punto de la región $R_1 < r < R_2$.

b) Halle también la densidad superficial de carga en cada superficie conductora.

Solución:

Es evidente que hay simetría traslacional a lo largo del eje de los cilindros (eje *Z*) y hay también simetría azimutal. En consecuencia el potencial depende sólo de la coordenada cilíndrica ρ que llamaremos *r*.

$$U = U(r)$$

La ecuación de Laplace, ec. (2c) se reduce entonces a:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

cuya solución general es:

$$U(r) = A \ln r + B$$

La solución particular buscada debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$U_1 = A \ln R_1 + B$$

$$U_2 = A \ln R_2 + B,$$

de donde deducimos que los valores de las constantes A y B son:

$$A = \frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad ; \quad B = U_1 - \frac{(U_2 - U_1)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln R_1 .$$

Reemplazando estos valores en la solución general, tenemos la siguiente expresión para el potencial electrostático:

$$U(r) = \frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} + U_1 .$$

El gradiente de este potencial nos da el campo eléctrico:

$$\vec{E}(r) = -\frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r} \hat{e}_\rho$$

Y usando: $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \bullet \hat{n}$ tendremos las densidades superficiales de carga:

$$\sigma \Big|_{r = R_1} = \varepsilon_0 \frac{U_1 - U_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{R_1} \quad ; \quad \sigma \Big|_{r = R_2} = \varepsilon_0 \frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{R_2}$$

Nótese que las cargas por unidad de longitud ($\lambda = \sigma (2\pi R)$) en cada superficie conductora son iguales en magnitud y de signo contrario, como tiene que ser para que el campo eléctrico en puntos del conductor externo sea nulo.

Los tres ejemplos anteriores pueden resolverse sin usar la ecuación de Laplace; puede en esos casos suponerse densidades uniformes de carga, hallar el campo eléctrico por ley de Gauss, usar la definición de potencial y finalmente encontrar los valores de densidad de carga**.**

3.3 PROBLEMAS CON DOS VARIABLES

Nos referimos ahora a problemas en que la ecuación de Laplace se reduce a una ecuación diferencial en derivadas parciales con dos variables.

3.3 A COORDENADAS CILINDRICAS

Nos restringiremos a problemas con simetría traslacional a lo largo de una dirección, que siempre podemos identificar con el eje *Z*. En estos casos la ecuación de Laplace (2c) se reduce a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}=0 \qquad (3)$$

Para obtener la solución general a ésta usamos el método de separación de variables. Para ello comenzamos suponiendo:

$$U(r,\phi)=S(r)\,\Phi(\phi) \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) obtenemos:

$$\frac{\Phi(\phi)}{r}\frac{d}{d r}\left(r\frac{d S}{d r}\right)+\frac{S(r)}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0 \qquad (5)$$

Multiplicando ambos miembros de la ec.5 por $\frac{r^2}{S\,\Phi}$ tenemos:

$$\frac{r}{S(r)}\frac{d}{d r}\left(r\frac{d S}{d r}\right)+\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0$$

Esta expresión es válida para cualquier punto de la región en estudio (r,ϕ,z); pero el primer sumando depende sólo de r y el segundo depende sólo de ϕ. Entonces para que siempre se cancelen entre sí deben ser iguales a una constante k^2 y $-k^2$ respectivamente. Tenemos entonces:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+k^2\Phi=0 \qquad (3a)$$

$$\frac{d}{d r}\left(r\frac{d S}{d r}\right)-k^2\frac{S(r)}{r}=0 \qquad (3b)$$

NOTA.- Los signos de k^2 podrían intercambiarse en las ecs. (3a y 3b), pero ello implicaría soluciones no periódicas para $\Phi(\phi)$, lo cual es físicamente inaceptable, ya que el potencial electrostático debe ser tal que:

$$U(r,\phi) = U(r,\phi+2\pi) \tag{6}$$

Son soluciones a la ec. (3a) las siguientes:

$$\Phi(\phi) = \text{cte.} \begin{cases} 1 \ , \ \text{si } k=0 \\ \text{Cos}\, k\phi \\ \text{Sen}\, k\phi \end{cases}$$

(Para k = 0 no consideramos la solución $\{(\text{constante})\,\phi\}$ porque no es periódica). Pero todavía las funciones ϕ que acabamos de escribir no son en general periódicas. Los valores de k deben ser tales que:

$$\text{Cos}\, k\phi = \text{Cos}\, k\,(\phi+2\pi)$$

$$\text{Sen}\, k\phi = \text{Sen}\, k(\phi+2\pi)$$

lo cual es posible sólo si:

$$k = n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,...$$

En resumen, podemos decir que las soluciones físicamente aceptables a la ec. (3a) son:

$$\Phi(\phi) = \text{cte.} \begin{cases} 1 \quad , \quad \text{si } k=n=0 \\ \text{Cos}\, n\phi \quad , \quad \text{si } k=n=1,2,... \\ \text{Sen}\, n\phi \quad , \quad \text{si } k=n=1,2,... \end{cases} \tag{7}$$

La ec. (3b) ahora se escribirá:

$$\frac{d}{d\,r}\left(r\,\frac{d\,S}{d\,r}\right) - n^2\,\frac{S(r)}{r} = 0 \tag{3b'}$$

cuyas soluciones son:

$$S(r) = \text{cte.}\begin{cases} 1 & ; \quad \text{si } k = n = 0 \\ \ln r & ; \quad \text{si } n = 0 \\ r^{n} & ; \quad \text{si } k = n = 1, 2, \ldots \\ r^{-n} & ; \quad \text{si } k = n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Reemplazando (7) y (8) en (4) (la solución a la ec. de Laplace (3) es el producto de una solución a (3a) por una solución a (3b)) tendremos:

$$U_n(r,\phi) = \text{cte.}\begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ \ln r & , \quad n = 0 \\ r^{n}\,\text{Cos}\,n\phi & , \quad n = 1, 2, \ldots \\ r^{-n}\,\text{Cos}\,n\phi & , \quad n = 1, 2, \ldots \\ r^{n}\,\text{Sen}\,n\phi & , \quad n = 1, 2, \ldots \\ r^{-n}\,\text{Sen}\,n\phi & , \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

Usando el teorema de linealidad podemos decir, entonces, que la solución general a la ec. de Laplace en coordenadas cilíndricas cuando hay simetría traslacional a lo largo del eje *Z* es la serie Fourier:

$$U(r,\phi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{n} + B_n r^{-n})\,\text{Cos}\,n\phi + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^{n} + D_n r^{-n})\,\text{Sen}\,n\phi \tag{10}$$

EL PROBLEMA GENERAL

Hallar el potencial electrostático en la región comprendida entre dos cilindros coaxiales de longitud infinita y radios R_1 y R_2 , teniendo como dato que el potencial en las superficies cilíndricas frontera es: $U(R_1, \phi) = f_1(\phi)$ y $U(R_2, \phi) = f_2(\phi)$.

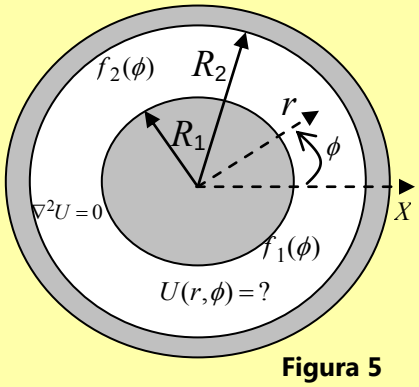


Figura 5

Solución: Teniendo en cuenta que U no depende de z y que:

$$f_1(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos} n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sen} n\phi \quad ; \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\phi) \operatorname{Cos} n\phi \, d\phi$$

$$f_2(\phi) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \operatorname{Cos} n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \operatorname{Sen} n\phi \quad ; \qquad b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\phi) \operatorname{Sen} n\phi \, d\phi$$

$$U(R_1, \phi) = A_0 + B_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R_1^n + B_n R_1^{-n}) \operatorname{Cos} n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n R_1^n + D_n R_1^{-n}) \operatorname{Sen} n\phi$$

$$U(R_2, \phi) = A_0 + B_0 \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R_2^n + B_n R_2^{-n}) \operatorname{Cos} n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n R_2^n + D_n R_2^{-n}) \operatorname{Sen} n\phi$$

podemos decir entonces que la solución a este problema general es la ecuación (10) donde las constantes A_n, B_n, C_n y D_n se encuentran resolviendo los siguientes pares de ecuaciones algebraicas:

$$A_0 + B_0 \ln R_1 = \frac{a_0}{2} \qquad A_0 + B_0 \ln R_2 = \frac{a'_0}{2}$$

$$A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} = a_n \qquad A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} = a'_n$$

$$C_n R_1^n + D_n R_1^{-n} = b_n \qquad C_n R_2^n + D_n R_2^{-n} = b'_n .$$

NOTA: Si $a_n = a'_n = 0$, entonces $A_n = B_n = 0$; es decir, en la región de interés sólo aparecerán los términos Fourier que aparecen en la frontera.

Ejemplo 4 Hallar el potencial electrostático entre las superficies cilíndricas de longitud infinita y de radios R_1 y R_2; sabiendo que en la superficie $r = R_1$ el potencial está dado por $f_1(\phi) = U_1 \operatorname{Cos}\phi$ y en la región $r = R_2$ por $f_2(\phi) = U_2 = \text{cte.}$

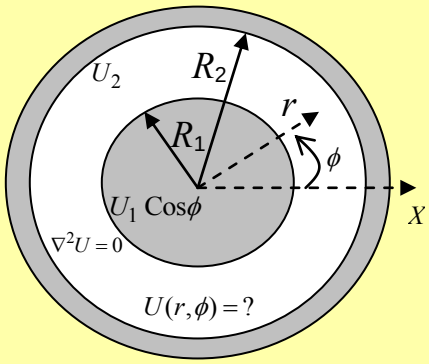


Figura 6.

Solución:

En este caso los coeficientes de Fourier de f_1 y f_2 se pueden hallar por simple inspección y son:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = U_1 \quad , \quad a_n = 0 \quad \text{para } n > 1 \text{ y } b_n = 0 \text{ para todo } n$$

$$a'_0 = U_2 \, , \quad a'_1 = 0 \, , \; a'_n = 0 \quad \text{para} \quad n > 1 \quad \text{y} \quad b'_n = 0 \quad \text{para todo } n \, .$$

Los únicos términos Fourier que aparecen en la frontera son el término constante y el término $\text{Cos}\phi$, por lo tanto la solución general de la ecuación (10) se reduce a:

$$U(r,\phi) = A_0 + B_0 \ln r + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) \text{Cos}\, \phi$$

Para satisfacer las condiciones de frontera debe cumplirse que:

$$A_0 + B_0 \ln R_1 = 0 \qquad A_0 + B_0 \ln R_2 = U_2$$

$$A_1 R_1 + B_1 R_1^{-1} = U_1 \qquad A_1 R_2 + B_1 R_2^{-1} = 0 \, ,$$

de donde se obtiene:

$$A_0 = -\frac{U_2}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} \ln R_1 \quad , \quad B_0 = \frac{U_2}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$$

$$A_1 = -\frac{U_1 R_1}{R_2^2 - R_1^2} \quad , \quad B_1 = \frac{U_1 R_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

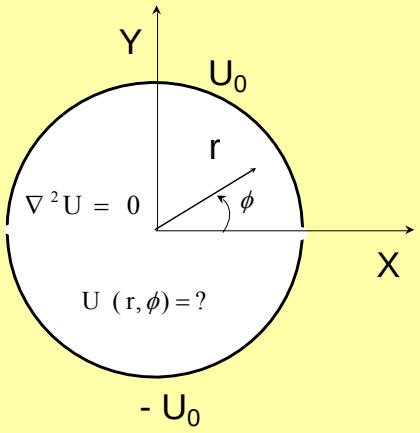
La solución a este problema es entonces:

$$U(r,\phi) = \frac{U_1 R_1}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{R_2^2}{r} - r \right] \text{Cos}\, \phi + \frac{U_2}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}$$

Ejemplo 5. Dos semicilindros conductores de radio a y de longitud infinita se mantienen a los potenciales U_0 y $-U_0$ como se muestra en la figura. Se pide:

a) Hallar el potencial en la región $r < a$.

b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico en el eje del cilindro?



Solución: Puesto que es evidente que U no depende de la coordenada *Z*, el potencial debe expresarse por la ec. (10). Usamos como condición de frontera el hecho de que el potencial en el eje del cilindro $(r=0)$ no puede ser infinito. Esto nos permite obtener inmediatamente:

$$B_n = D_n = 0 \quad ; \quad \text{para todo } n$$

Los demás coeficientes deben satisfacer la condición de frontera:

$$U(a,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, a^n \operatorname{Cos} n\phi + C_n\, a^n \operatorname{Sen} n\phi)$$

donde:

$$U(a,\phi) = \begin{cases} -U_0 & ; \quad -\pi < \phi < 0 \\ \\ U_0 & ; \quad 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

Como ésta es una función impar sólo nos preocupamos de calcular los C_n. Los coeficientes A_n son todos nulos.

Por el método de Fourier obtendremos:

$$C_n = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \dfrac{4U_0}{n\pi a^n} & ; \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

luego:

$$U(r,\phi) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \operatorname{Sen} n\phi$$

También:

$$U(r,\phi) = \frac{4U_0}{\pi}\left\{\frac{y}{a} + \sum_{\substack{n=3 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \operatorname{Sen} n\phi\right\}$$

y de $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ obtenemos: $\vec{E}\,(\text{eje}) = \vec{E}\,(0,\phi) = -\dfrac{4U_0}{\pi a}\,\hat{j}$

(Ver también problema propuesto 4).

3.3B COORDENADAS ESFÉRICAS

Trataremos sólo casos de simetría azimutal, es decir, problemas en que podemos establecer a priori que el potencial electrostático no depende de la coordenada ϕ . En tales casos la ec. de Laplace (ec.2b) se reduce a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{Sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{Sen}\,\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (2b')$$

La solución general a esta ecuación diferencial en derivadas parciales se puede encontrar por el método de separación de variables, para lo cual empezamos asumiendo que:

$$U(r,\theta)\;=\;R(r)\;\Theta(\theta) \qquad (11)$$

Reemplazando (11) en (2b') y multiplicando ambos miembros por $r^2/R\Theta$ tenemos:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\mathrm{Sen}\,\theta}\frac{d}{d\,\theta}\left(\mathrm{Sen}\,\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\;=\;0 \qquad (12)$$

Puesto que un sumando del primer miembro depende sólo de r y el otro sólo de θ , para que ambos se cancelen en todos los puntos del espacio deben ser iguales a una constante que llamaremos k. El problema de resolver la ecuación en derivadas parciales se reduce entonces a resolver las dos siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\;kR\;=0 \qquad (13)$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\mathrm{Sen}\,\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\;k\,(\mathrm{Sen}\,\theta)\,\Theta\;=\;0 \qquad (14)$$

Haciendo el cambio de variable $x=\mathrm{Cos}\,\theta$, la ec. (14) se puede escribir:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-\;x^2\;)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\;k\Theta\;=\;0 \qquad (14a)$$

Al intentar solucionar la ec. (14a) por el método de Frobenius, uno encuentra que sólo hay soluciones físicamente aceptables si

$$k = n\,(n+1) \qquad \text{siendo } n \text{ entero}$$

y estas soluciones son los polinomios de Legendre:

$$\Theta(x) = P_n(x) \tag{15}$$

Cualquier polinomio de Legendre puede obtenerse de la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{16}$$

y tienen las siguientes propiedades de ortonormalización:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & , \quad \text{si} \quad n = m \end{cases} \tag{17}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\int_0^{\pi} P_n(\mathrm{Cos}\,\theta) P_m(\mathrm{Cos}\,\theta)\,\mathrm{Sen}\,\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & , \quad \text{si} \quad n = m \end{cases}$$

La siguiente es una lista de algunos polinomios de Legendre:

n	$P_n(x)$	$P_n(\mathrm{Cos}\,\theta)$
0	1	1
1	x	$\mathrm{Cos}\,\theta$
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$\frac{1}{2}(5\,\mathrm{Cos}^3\theta - 3\,\mathrm{Cos}\,\theta)$

(18)

Obsérvese que los coeficientes de los polinomios de Legendre han sido fijados de tal manera que cuando $x = 1$ $(\theta = 0)$, $P_n = 1$.

La ecuación (13) ahora se escribirá:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)R = 0 \qquad (13a)$$

cuyas soluciones son:

$$R(r) = r^n \qquad \text{y} \qquad R(r) = r^{-(n+1)} \qquad (19)$$

Las ec. (11), (15), (19) y el teorema de linealidad nos permiten decir que la solución general para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas cuando se tienen problemas de simetría azimutal es la serie Fourier-Legendre:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\,r^n + B_n\,r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta) \qquad (20)$$

EL PROBLEMA GENERAL

Hallar el potencial electrostático en la región comprendida entre dos esferas concéntricas de radios a y b, teniendo como dato que el potencial electrostático en las superficies frontera es:

$U(a,\theta) = f(\theta)$ y $U(b,\theta) = g(\theta)$

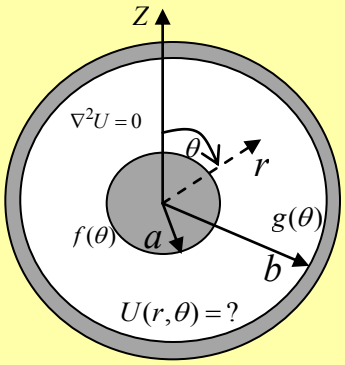


Figura 8

Solución

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que las funciones f y g pueden expandirse en sus respectivas series Fourier-Legendre:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,P_n(\cos\theta) \qquad (21a)$$

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n\,P_n(\cos\theta) \qquad (21b)$$

donde

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\text{Cos}\,\theta)\, f(\theta)\,\text{Sen}\,(\theta)\, d\theta \quad \text{y}$$

$$C_n' = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\text{Cos}\,\theta)\, g(\theta)\,\text{Sen}(\theta)\, d\theta$$

Para que la solución general (ec 20) satisfaga las condiciones de frontera del problema general deben cumplirse entonces las siguientes ecuaciones:

$$C_n = A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} \tag{22a}$$

$$C_n' = A_n b^n + \frac{B_n}{b^{n+1}} \tag{22b}$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas (22) podemos obtener A_n y B_n (cualquier coeficiente) con lo cual queda resuelto el problema de hallar $U(r,\theta)$ en la región $a < r < b$.

NOTA: Si $C_n = C_n' = 0$, entonces $A_n = B_n = 0$; es decir, en la región de interés sólo aparecerán los términos Fourier-Legendre que aparecen en la frontera.

Ejemplo 6 Hallar el potencial electrostático, $U(\vec{r})$, en la región comprendida entre dos superficies esféricas concéntricas de radios a y b (a<b) sabiendo que el potencial en las superficies es:

$$U(a,\theta) = f(\theta) = U_a = \text{constante}$$

$$U(b,\theta) = g(\theta) = U_b\,\text{Cos}\,\theta$$

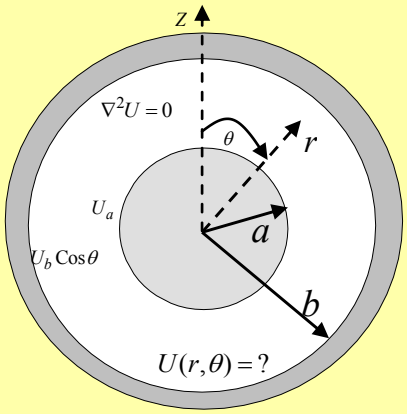


Figura 9

Solución:

Puesto que en ninguna de las superficies esféricas frontera U depende de ϕ, entonces en toda la región $a < r < b$ tampoco U depende de ϕ. La solución a este problema particular debe ser entonces de la forma general (20).

Observando, además, que el potencial en la frontera sólo contiene los términos Fourier–Legendre P_0 y $P_1(Cos\theta)$, podemos decir que para este problema particular la ecuación (20) se reduce a:

$$U(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)\mathrm{Cos}\,\theta \tag{23}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera mostradas en la figura (9), los coeficientes A_0, B_0, A_1, B_1 deben cumplir:

$$A_0 + \frac{B_0}{a} = U_a \tag{24a}$$

$$A_0 + \frac{B_0}{b} = 0 \tag{24b}$$

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0 \tag{24c}$$

$$A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = U_b \tag{24d}$$

Resolviendo las ecuaciones (24) se obtiene:

$$A_0 = -\frac{a U_a}{b - a} \quad ; \quad B_0 = \frac{U_a\, a b}{b - a}$$

$$A_1 = -\frac{U_b\, b^2}{a^3 - b^3} \quad ; \quad B_1 = \frac{U_b\, b^3 a^2}{a^3 - b^3}$$

El potencial electrostático en la región $a < r < b$ es entonces:

$$\boxed{U(r,\theta) = \frac{a U_a}{b - a}\left(\frac{b}{r} - 1\right) + \frac{U_b\, b^2}{(a^3 - b^3)}\left(\frac{a^3}{r^2} - r\right)\mathrm{Cos}\theta} \tag{25}$$

Puede verificarse que efectivamente esta solución satisface las condiciones de frontera.

Ejemplo 7 En una región donde existe un campo eléctrico uniforme se coloca una esfera conductora de radio a con carga neta Q. Hallar el potencial electrostático $U(\vec{r})$ y el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en la región $r > a$.

Solución:

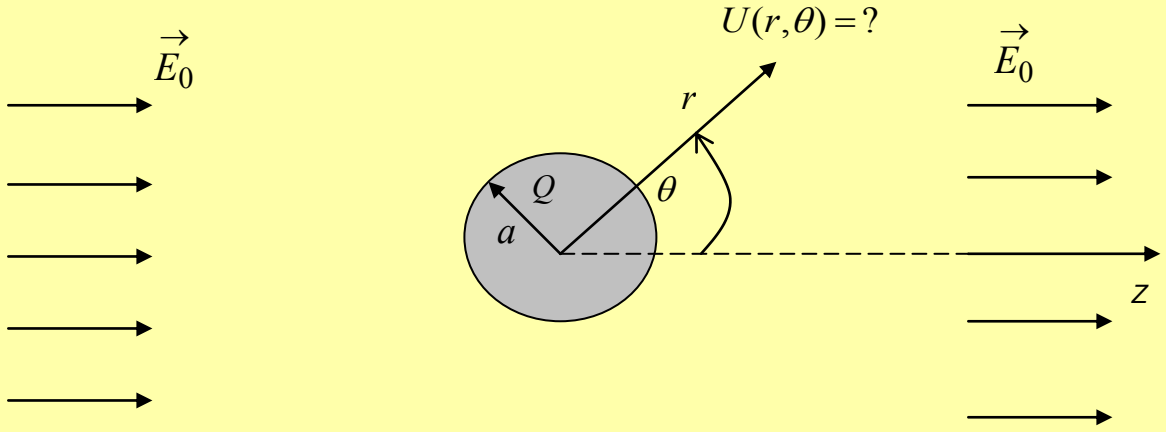


Figura 10 Esfera conductora de radio a con carga Q sumergida en campo externo uniforme. Muy lejos de la esfera el campo sigue siendo uniforme.

Tomando como origen el centro de la esfera y como eje Z la dirección y sentido de $\vec{E}_0$ podemos constatar a priori que U no depende de ϕ. Por lo tanto el potencial buscado quedará expresado por la fórmula general:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n\, r^{\,n} + B_n\, r^{-(n+1)} \right) P_n(\mathrm{Cos}\,\theta) \qquad (20)$$

que en este caso debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$U(r = a) = U_0 \qquad (26a)$$

porque todo conductor es equipotencial; y

$$\vec{E}_0\,(r \to \infty) = E_0\,\hat{k} \qquad (26b)$$

porque muy lejos de la esfera el campo externo no es afectado.

La ec.(26a) es una condición de Dirichlet y la ec.(26b) es una condición de Neumann; esperamos por eso que el potencial sea indeterminado en una constante aditiva.

La condición (26b) puede escribirse también:

$$U\,(r \to \infty) \;=\; -E_0 z \;+\; \text{cte.} \;=\; -E_0 r\,\text{Cos}\theta \;+\; \text{cte.} \qquad (26b')$$

De las ec. (20) y (26b') obtenemos:

$$-\;E_0\,r\,\text{Cos}\,\theta \;+\; \text{cte.} \;=\; A_0 \;+\; A_1\,r\,\text{Cos}\,\theta \;+\; \ldots \;+\; A_n\,r^n P_n(\text{Cos}\,\theta) \qquad (27)$$

de la cual resulta:

$$A_0 \;=\; \text{cte.} \qquad ; \qquad \ldots \qquad (28a)$$

$$A_1 \;=\; -E_0 \qquad (28b)$$

$$A_n \;=\; 0 \qquad \text{para } n > 1 \qquad (28c)$$

Reemplazando los valores (28) en la ec.(20) y usando la condición de frontera (26a) podemos escribir:

$$U_0 \;=\; A_0 - E_0 a\,\text{Cos}\,\theta \;+\; \frac{B_0}{a} \;+\; \frac{B_1}{a^2}\text{Cos}\,\theta \;+\ldots+\; \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\text{Cos}\,\theta) \qquad (29)$$

de la cual obtenemos:

$$U_0 \;=\; A_0 \;+\; \frac{B_0}{a} \qquad ; \qquad (30a)$$

$$B_1 \;=\; E_0 a^3 \qquad (30b)$$

$$B_n \;=\; 0 \qquad , \qquad \text{para todo } n > 1 \qquad (30c)$$

Reemplazando las ecs. (28) y (30) en la formula general (20) se tiene:

$$\boxed{U(r\,,\theta) \;=\; A_0 \;+\; \frac{B_0}{r} \;-\; E_0\,r\,\text{Cos}\,\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)} \qquad (31)$$

Todavía quedan por determinar las constantes A_0 y B_0. Para ello nos quedan las ec. (28a) y (30a), lo cual equivale a no tener nada porque U_0 y cte. no son datos del problema. A_0 es una constante arbitraria que puede hacerse cero. Para determinar B_0 usamos la condición de que la carga total en la superficie de la esfera conductora es Q:

$$Q = \iint_{ESFERA} \sigma \, da = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \, 2\pi a^2 \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \tag{32}$$

Para usar (32) deducimos de la ec. (31) la siguiente expresión para la densidad superficial de carga:

$$\sigma\big|_{r=a} = \varepsilon_0 \, E_r\big|_{r=a} = \varepsilon_0 \left(\frac{B_0}{a^2} + 3 \, E_0 \operatorname{Cos}\theta \right) \tag{33}$$

Reemplazando la ec. (33) en la ec. (32) obtenemos:

$$B_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \tag{34}$$

El potencial en cualquier punto de la región $r > a$ es entonces:

$$U(r,\theta) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r} - E_0 \, r \operatorname{Cos}\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \tag{35}$$

y el campo eléctrico está dado por las dos siguientes ecuaciones:

$$E_r(r,\theta) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} + E_0 \operatorname{Cos}\theta \left(1 + \frac{2\,a^3}{r^3} \right) \tag{35b}$$

$$E_0(r,\theta) = -E_0 \operatorname{Sen}\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \tag{35c}$$

NOTA Es importante leer en la ec. (35) que el campo eléctrico resultante es la superposición del campo inicial $\vec{E_0}$, del campo de la esfera con carga Q y de un dipolo inducido que se puede suponer ubicado en el centro de la esfera.

CASO PARTICULAR I Si la esfera colocada en la región del campo $\vec{E_0}$ es neutra (sin carga) entonces:

$$U(r,\theta) = -E_0 \, r \operatorname{Cos}\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \tag{36a}$$

$$E_r(r,\theta) = E_0 \,\mathrm{Cos}\theta \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \tag{36b}$$

$$E_\theta(r,\theta) = -E_0 \,\mathrm{Sen}\,\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \tag{36c}$$

$$\sigma\big|_{r=a} = 3\,\varepsilon_0\, E_0 \,\mathrm{Cos}\theta \tag{36d}$$

En este caso tendremos el siguiente diagrama de líneas de fuerza y superficies equipotenciales.

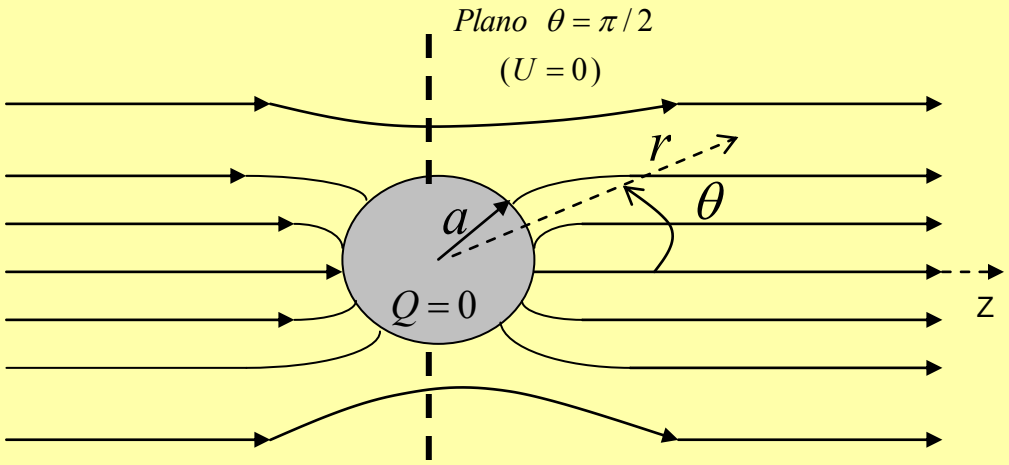


Figura 11 Forma aproximada de las líneas de fuerza del campo eléctrico resultante cuando una esfera conductora neutra se sumerge en un campo externo uniforme.

Nótese aquí que el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ sí es un plano equipotencial, pero no lo es en el caso general $Q \neq 0$.

CASO PARTICULAR II.- Si en una de las placas de un condensador de placas paralelas se produce una deformación hemisférica de radio a << d (d es la separación entre las placas) como se muestra en la figura (11a).

a) hallar $U(r,\theta)$ entre las placas,

b) halle la carga total en la deformación hemisférica.

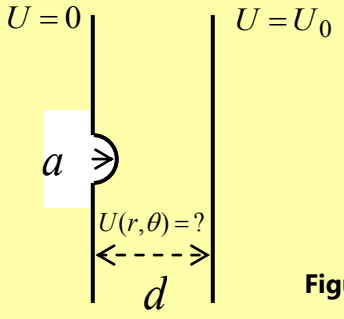


Figura 11a

Solución: Podemos imaginar que la parte plana de la placa deformada es sólo la superficie equipotencial $\theta = \frac{\pi}{2}$ del caso particular I. Para la región entre las placas el problema es el mismo que el de una esfera neutra de radio a en un campo eléctrico uniforme $E_0 = \frac{U_0}{d}$. $U(r,\theta)$ y $\vec{E}(r,\theta)$ son entonces dados por las expresiones (36) del caso particular I teniendo en cuenta que son sólo válidas en la región comprendida entre las placas. Fuera de ellas el campo eléctrico es nulo. La carga eléctrica en el hemisferio puede hallarse de la siguiente manera:

$$Q_{hem} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\,\varepsilon_0\, E_0\, \mathrm{Cos}\theta\,(2\pi a^2\,\mathrm{Sen}\theta\, d\theta)$$

$$Q_{hem} = -6\pi\varepsilon_0 a^2 E_0 = -6\pi\varepsilon_0\, a^2\, \frac{U_0}{d}$$

Ejemplo 8. Se tiene un anillo de radio R con carga Q uniformemente distribuida. Hallar $U(\vec{r})$ en cualquier punto de la región $r > R$.

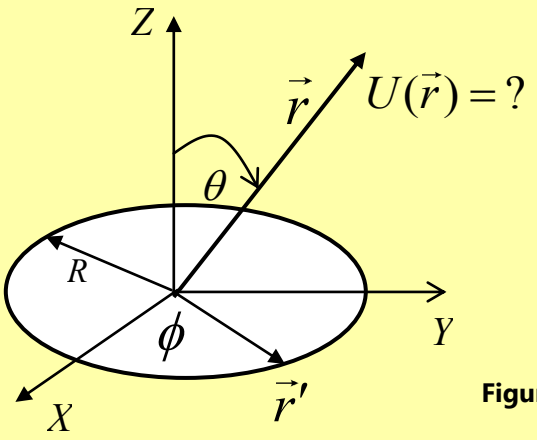


Figura 12.

Solución Puede constatarse a priori que existe simetría azimutal y por lo tanto el potencial electrostático en cualquier punto del espacio es de la forma:

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n\, r^n + B_n\, r^{-(n+1)} \right) P_n(\mathrm{Cos}\theta) \qquad (20)$$

Sabemos que el potencial debido a este anillo en puntos del eje Z es:

$$U(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(z^2 + R^2 \right)^{-1/2} \qquad (37)$$

Esta expresión se puede expandir para puntos $z > R$ en la serie:

$$U(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^3} + \frac{3}{8}\frac{R^4}{z^5} + \ldots\right\} \qquad (38a)$$

ó

$$U(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ \ldots\ \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)R^{2k}}{k!\, z^{2k+1}}\right\} \qquad (38b)$$

Las ecuación (38a) (ó (38b)) puede entonces usarse como condición de frontera que debe ser satisfecha por la ecuación (20) cuando $\theta = 0$

La ecuación (20) para puntos del eje *Z* se convierte en:

$$U(r,0) = U(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\, z^n + B_n\, z^{-(n+1)}\right) \qquad (39)$$

(porque en el eje Z, $P_n(\mathrm{Cos}\,\theta) = 1$ y $r = z$)

Lo que queda por hacer es entonces buscar los coeficientes de la ec. (39) (ó ec.20) que satisfagan las ecuaciones (38) .

Para que coincidan las ecs. (39) y (38) los coeficientes deben tomar los valores:

$A_n = 0$, para todo n; $B_n = 0$, para todo n impar ; $B_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$

$$B_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^2}{2} \quad ; \quad B_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{8}R^4$$

$$B_n = B_{2k} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ \ldots\ \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)R^{2k}}{k!}\right\}, \; n \text{ es par}$$

En consecuencia, en cualquier punto de la región $r > R$ el potencial electrostático es:

$$U(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^3}\left[\frac{3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1}{2}\right] + \frac{3}{8}\frac{R^4}{r^5}P_4\left(\mathrm{Cos}\theta\right) + \ldots\right\}$$

ó

$$U(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ \ldots\ \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)R^{2k}\ P_{2k}\left(\mathrm{Cos}\theta\right)}{k!\ r^{2k+1}}\right\} \qquad (40a)$$

Nótese que para puntos muy alejados del anillo ($r >> R$) pueden ser suficientes sólo algunos términos de la sumatoria, por ejemplo,

$$U(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r} - \frac{R^2}{4\,r^3}\left(3\,\mathrm{Cos}^2\theta - 1\right) + \ldots\right\}$$

Obsérvese ahora que el primer término de la sumatoria coincide con la contribución monopolar y el segundo con la contribución cuadrupolar del potencial (ver ejemplo N°9 del cap.II)

3.3C COORDENADAS CARTESIANAS

Cuando hay simetría traslacional a lo largo de una dirección (a la que siempre podemos identificar con el eje *Z*) la ecuación de Laplace (ec.2a) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (2a')$$

La solución general para esta ecuación se puede encontrar por el método de separación de variables que consiste en suponer:

$$U(x,y) = X(x)\,Y(y) \qquad (41)$$

Reemplazando (41) en (2a') obtenemos:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

la cual se verifica sólo si:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 \tag{42a}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 \tag{42b}$$

(el signo menos puede intercambiarse en las ec.(42a) y (42b)).

Para un valor dado de k las soluciones generales a las ecuaciones diferenciales ordinarias (42a) y (42b) son:

$$X_k(x) = A_k\, e^{kx} + B_k\, e^{-kx} \tag{43}$$

$$Y_k(y) = C_k \operatorname{Cos} ky + D_k \operatorname{Sen} ky \tag{44}$$

Reemplazando (43) y (44) en (41) y utilizando el teorema de linealidad podemos decir que la solución general a la ecuación de Laplace con dos variables en coordenadas cartesianas es:

$$U(x,y) = \sum_k \left(A_k\, e^{kx} + B_k\, e^{-kx}\right)\left(C_k \operatorname{Cos} ky + D_k \operatorname{Sen} ky\right) \tag{45}$$

donde la sumatoria es sobre todos los k posibles.

NOTA I En principio k toma cualquier valor; pero al imponer condiciones de frontera a $U(x,y)$, las funciones $X(x)$ e $Y(y)$ deben también satisfacer ciertas condiciones y estas restringen los valores posibles de k.

NOTA II Las ecuaciones (43) y (44) pueden escribirse también en la forma:

$$X_k(x) = A_k \operatorname{Cosh} kx + B_k \operatorname{Senh} kx \tag{43a}$$

$$Y_k(y) = C_k\, e^{-iky} + D_k\, e^{iky} \tag{44a}$$

respectivamente. De tal manera que la ec.(45) puede escribirse de cuatro maneras. Hay que elegir la que se adecúe al problema físico concreto.

NOTA III Si en las ecuaciones (42a) y (42b) intercambiamos el signo del segundo miembro significa simplemente que estamos haciendo un cambio de nombre a las variables y eso implica que en la ec.(45) se deben intercambiar las x y las y; lo mismo tendría que hacerse en las ec. (43a) y (44a).

Para evitar esta multiplicidad de formas de escribir la solución general a la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas cartesianas es mejor guardar en mente sólo que la solución es una sumatoria de productos de una función armónica por una función hiperbólica (o exponencial real).

Ejemplo 9. Cuatro láminas conductoras que se extienden desde $-\infty$ hasta $+\infty$ a lo largo del eje *Z*, están dispuestas como se muestra en la figura. El potencial electrostático en cada una de ellas es el indicado en la figura. Hallar $U(\vec{r})$ en cualquier punto del espacio encerrado por las láminas.

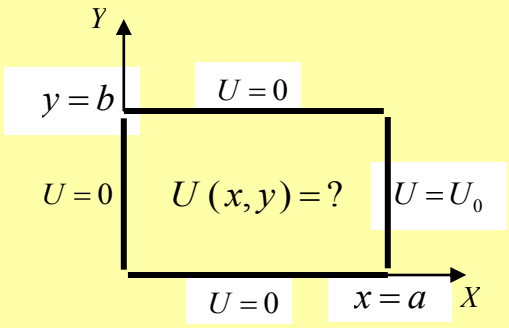


Figura 13.

Solución: En este problema de Dirichlet las condiciones de frontera pueden escribirse de la siguiente forma:

$$U(x,0) = X(x)\,Y(0) = 0 \qquad \text{(46a)}$$

$$U(x,b) = X(x)\,Y(b) = 0 \qquad \text{(46b)}$$

$$U(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0 \qquad \text{(46c)}$$

$$U(a,y) = X(a)\,Y(y) = U_0 \qquad \text{(46d)}$$

De las ecuaciones (46a) y (46b) observamos que cualquier función $Y_k(y)$ debe satisfacer las condiciones:

$$Y_k(0) = 0$$

$$Y_k(b) = 0$$

Sabemos además que las funciones $Y_k(y)$ son de la forma de la ec. (44) y por lo tanto:

$$Y_k(0) = 0 \quad \text{implica} \quad C_k = 0$$

$$Y_k(b) = 0 \quad \text{implica} \quad k = \frac{n\pi}{b}$$

de tal manera que el factor del potencial electrostático dependiente de y puede escribirse:

$$Y_k(y) = Y_n(y) = D_n \,\text{Sen}\, \frac{n\pi}{b} y$$

Para cada valor de k hay una función X_k (ó X_n):

$$X_n(x) = A_n \text{Cosh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + B_n \text{Senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

Puesto que en el plano x = 0 el potencial es cero entonces A_n debe ser cero y por lo tanto: $U_n(x,y)$ será de la forma:

$$U_n(x,y) = G_n \,\text{Senh}\, \frac{n\pi}{b} x \,\text{Sen}\, \frac{n\pi}{b} y \qquad (47)$$

Nótese que la ec. (47) satisface la ecuación de Laplace y tres de las condiciones de frontera pero ninguna constante G_n va a satisfacer la condición de frontera (46d); debemos entonces recurrir al teorema de linealidad y decir que si para cualquier entero n, U_n satisface la ec. de Laplace, entonces:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \,\text{Senh}\, \frac{n\pi}{b} x \,\text{Sen}\, \frac{n\pi}{b} y \qquad (48)$$

satisface también la ec. de Laplace (y las condiciones de frontera (46a), (46b) y (46 c)).

Debemos ahora buscar los coeficientes G_n que satisfagan la condición (46d), es decir:

$$U(a,y) = U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \,\text{Senh}\, \frac{n\pi}{b} a \,\text{Sen}\, \frac{n\pi}{b} y \qquad (48a)$$

Para ello usamos la técnica de Fourier, que consiste en multiplicar por $Sen\, \frac{p\pi y}{b}$ ambos miembros de las ec. (48a) e integrar entre 0 y b. Procediendo Así tendremos:

$$G_n = \begin{cases} 4U_1/n\pi \quad , & \text{si } n \text{ es impar} \\ \\ 0 \qquad\quad , & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Podemos entonces decir que el potencial electrostático entre las placas es:

$$U(x,y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n\ impar}}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\text{Senh } \frac{n\pi}{b}x}{\text{Senh } \frac{n\pi}{b}a} \text{Sen } \frac{n\pi}{b}y \qquad (49)$$

Usando la función Plot 3D del programa mathematica podemos hacer un gráfico tridimensional de esta función con el número de términos que nosotros decidamos. En las figuras 14 mostramos una aproximación con un solo término y una con seis términos.

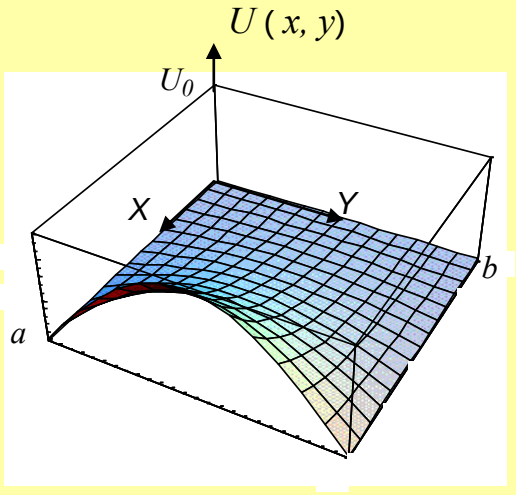


Figura 14a Aproximación al potencial $U(x,y)$ con un término de la serie (ec. (49))

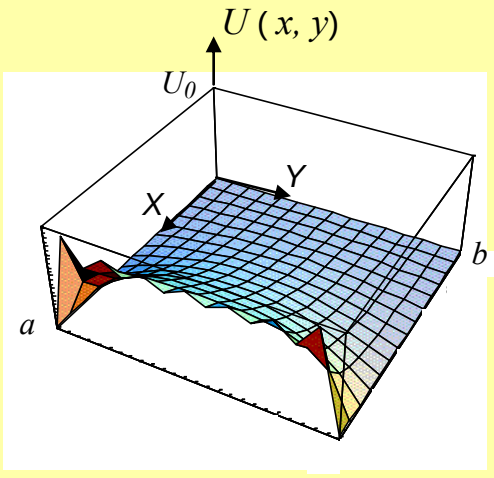


Figura 14b Aproximación al potencial $U(x,y)$ con 6 términos de la serie (ec. (49))

EJEMPLO CON 3 VARIABLES Hallar el potencial electrostático $U(\vec{r})$ en el interior de un paralepípedo de aristas a, b y c sabiendo que el valor del potencial en 5 caras del paralepípedo es cero y en la cara $z = c$ es $U = U_0$

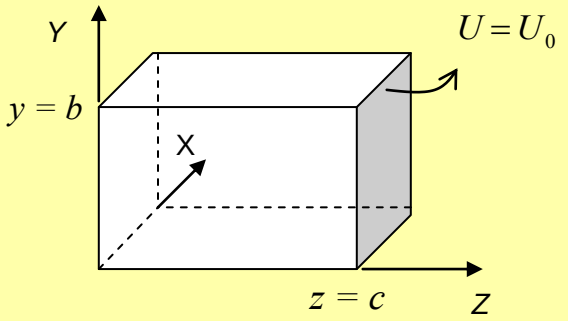


Figura 15.

Solución:

Escribimos la solución en la forma de serie de funciones cada una de la forma:

$$U(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \qquad (50)$$

Reemplazando (50) en (2a) tendremos tres ecuaciones de una sola variable:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_1^2\, X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_2^2\, Y(y) = 0$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k_3^2\, Z(z) = 0$$

donde: $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$. Teniendo en cuenta las condiciones de frontera obtenemos:

$$U(x,y,z) = \frac{16\,U_0}{\pi^2} \sum_{\substack{m\,n \\ m,\,n\ impares}}^{\infty} \left(\frac{1}{m\,n}\right) \frac{\operatorname{Senh} \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\; z}{\operatorname{Senh} \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\; c} \operatorname{Sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sen} \frac{n\pi y}{b}$$

3.4 PROBLEMAS CON DENSIDAD VOLUMÉTRICA DE CARGA

Si se presenta un problema con condiciones de frontera y densidad volumétrica de carga no nula, debemos encontrar la solución a la ec. de Poisson:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

que satisfaga las condiciones de Dirichlet o Neumann según el caso.
La solución a la ecuación de Pöisson (no homogénea) es siempre la solución a la ecuación de Laplace (homogénea) más una solución particular que depende de la forma explícita de $\rho(r)$.

Ilustraremos este método con algunos ejemplos donde la geometría es tal que U depende solo de una coordenada, En tales casos la ecuación de Laplace se reducirá a:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \tag{51}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \tag{52}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \tag{53}$$

en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas respectivamente.

Las soluciones respectivas a dichas ecuaciones son:

$$U(x) = A\,x + B + U_0(x) \tag{54}$$

$$U(r) = \frac{A}{r} + B + U_0(r) \tag{55}$$

$$U(r) = A\ln r + B + U_0(r) \tag{56}$$

donde U_0 es la solución particular que puede obtenerse, por ejemplo, integrando en forma indefinida la ecuación que se presente. Las constantes A y B se obtienen a partir de las condiciones de frontera de Dirichlet ó de Neumann según el caso.

Ejemplo 10. Entre dos placas conductoras paralelas separadas una pequeña distancia d y mantenidas a la diferencia de potencial ΔU, hay una distribución de carga, ρ_0, uniforme. Hallar el potencial electrostático y el campo eléctrico en la región entre placas.

Solución: La ecuación de Poisson toma ahora la forma:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

Una solución particular a ésta es:

$$U_0(x) = -\frac{\rho_0\, x^2}{2\,\varepsilon_0}$$

El potencial electrostático tiene entonces la forma:

$$U(x) = A\,x + B - \frac{\rho_0\, x^2}{2\,\varepsilon_0}$$

Para hallar las constantes A y B utilizamos las condiciones de frontera:

$$U(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad U(d) = \Delta U$$

de donde se obtiene:

$$A = \frac{\Delta U}{d} + \frac{\rho_0\, d}{2\,\varepsilon_0} \quad , \quad B = 0$$

El potencial electrostático es entonces:

$$U(x) = \left(\frac{\Delta U}{d} + \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}\right)x - \frac{\rho_0\ x^2}{2\ \varepsilon_0}$$

y el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \left(\frac{\rho_0\, x}{\varepsilon_0} - \frac{\Delta U}{d} - \frac{\rho_0\, d}{2\,\varepsilon_0}\right)\hat{i}$$

Ejemplo 11. Considerar dos superficies esféricas conductoras concéntricas de radios a y b conectadas a potenciales U_a y U_b respectivamente.

En la región $a < r < b$ hay una distribución volumétrica de carga dada por:

$$\rho(r) = \frac{C}{r}$$

Hallar el potencial electrostático y el campo eléctrico entre ambas superficies.

Solución.- La ecuación de Laplace toma ahora la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{C}{\varepsilon_0 r}$$

Una función particular que satisface esta ecuación diferencial es:

$$U_0(r) = -\frac{C\,r}{2\,\varepsilon_0}$$

La expresión para el potencial es entonces de la forma:

$$U(r) = \frac{A}{r} + B - \frac{C\,r}{2\,\varepsilon_0}$$

Las constantes A y B se hallan a partir de loas dos siguientes condiciones de frontera de Dirichlet:

$$U(a) = \frac{A}{a} + B - \frac{C\,a}{2\,\varepsilon_0} = U_a$$

$$U(b) = \frac{A}{b} + B - \frac{C\,b}{2\,\varepsilon_0} = U_b$$

Los valores de las constantes que se obtienen son:

$$A = \frac{U_a - U_b}{b-a} - \frac{C}{2\,\varepsilon_0}\,a\,b$$

$$B = U_a + \frac{C}{2\,\varepsilon_0}(a-b) - \frac{(U_a - U_b)}{b-a}\,b$$

La expresión para el potencial es:

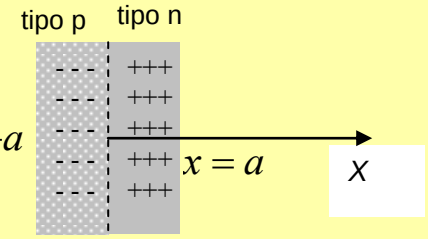
$$U(r) = \frac{U_a - U_b}{b-a}\left(\frac{a\,b}{r} - b\right) + \frac{C}{2\,\varepsilon_0}\left(b + a - r - \frac{a\,b}{r}\right) + U_a$$

y para el campo eléctrico:

$$\vec{E}(r) = \left\{\frac{U_a - U_b}{(b-a)\,r^2} + \frac{C}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a\,b}{r^2}\right)\right\}\hat{e}_r$$

Ejemplo 12. El potencial de contacto en la unión de un semiconductor tipo p con uno tipo n se explica por la existencia de una distribución volumétrica de carga

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 & , \quad \text{si} \quad 0 < x < a \\ -\rho_0 & , \quad \text{si} \quad -a < x < 0 \end{cases}$$



Si en un dispositivo específico el potencial de contacto es $U(a)-U(-a)=1\,\text{V}$ y $a=0{,}1\text{mm}$ ¿Cuál es el valor de ρ_0?

Solución:

$$U_1(x) = A_1 x + B_1 + \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} \qquad ; \qquad \text{si} \quad -a < x < 0$$

$$U_2(x) = A_2 x + B_2 - \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} \qquad ; \qquad \text{si} \quad 0 < x < a$$

$$U_1(0) = U_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2 = 0$$

$$\left.\frac{dU_1}{dx}\right|_{x=-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\frac{dU_2}{dx}\right|_{x=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$$

$$U_1(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2ax + x^2\right) \quad \text{si} \quad -a < x < 0$$

$$U_2(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2ax - x^2\right) \quad \text{si} \quad 0 < x < a$$

$$U_2(a) - U_1(-a) = 1\,\text{V} = \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_0 = 0{,}885\ \text{mC/m}^3$$

NOTA: Aunque estos tres últimos ejemplos pueden resolverse usando la ley de Gauss y la definición de potencial electrostático hemos creído conveniente presentarlos a estas alturas para ilustrar el método de la ecuación de Pöisson.

PROBLEMAS

1. Hallar el potencial electrostático y el campo eléctrico en la región comprendida entre los semiplanos $\phi = 0$ y $\phi = \phi_0$ sabiendo que el valor del potencial en las fronteras es: $U(\phi = 0) = 0$ y $U(\phi = \phi_0) = U_0$.

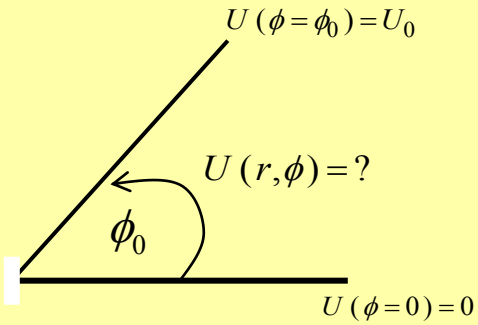


Figura 16.

2. En la figura adjunta se muestra un plano conductor y una superficie cónica infinitos. Sus potenciales son U = 0 y $U = U_0$ respectivamente. En la región comprendida entre ambas superficies se pide hallar:

a) El potencial electrostático,
b) El campo eléctrico.
c) Hallar también la densidad superficial de carga en ambas superficies conductoras.

(Considérese que se aíslan convenientemente las superficies conductoras en el punto común).

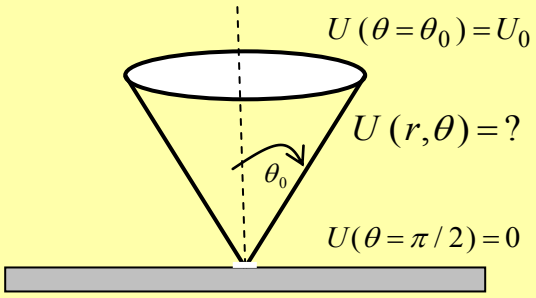


Figura 17.

3. Determinar el potencial electrostático dentro de un cilindro conductor infinito de radio interior a, partido a lo largo de su longitud en cuatro partes iguales, cada una de las cuales se mantiene a los potenciales mostrados en la figura.

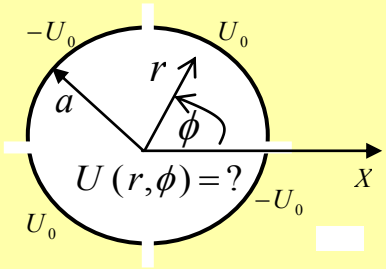


Figura 18.

4. Demostrar que el potencial en el interior de la región cilíndrica cuya frontera son dos semicilindros a potenciales U_0 y $-U_0$ (ejemplo 5) también puede ser escrita como:

$$U(r,\phi) = \frac{2\,U_0}{\pi}\,Tan^{-1}\left[\frac{2\,ar\,\text{Sen}\,\phi}{a^2-r^2}\right]$$

5. En una superficie cilíndrica de radio a, el potencial esta dado por:

$$U(a,\phi) = \begin{cases} U_0\,\text{Sen}\,\phi & ; \quad 0<\phi<\pi \\ \\ -U_0\,\text{Sen}\,\phi & ; \quad -\pi<\phi<0 \end{cases}$$

a) Hallar el potencial en cualquier punto de la región $r < a$.

b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico en el eje del cilindro?

6. Se tiene dos placas conductoras semi-infinitas y paralelas, separadas una distancia b y conectadas a Tierra como se muestra en la figura. En el plano $x = 0$ entre $y = 0$ y $y = b$ hay un electrodo de forma de tira infinita cuyo potencial es U_0. Encontrar el potencial en cualquier punto de la región comprendida entre las placas.

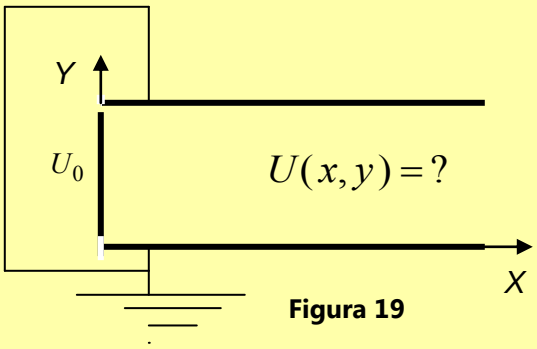


Figura 19

7. Repetir el problema anterior para el caso en que el potencial del electrodo en forma de tira infinita $\{x = 0\ ,\ 0 < y < b\}$ esté dado por la expresión:

$$U(0,y) = U_0\,\text{Sen}\,\frac{\pi y}{b}$$

8. Repetir el problema 6 para el caso en que el potencial del electrodo en forma de tira esté dado por la expresión:

$$U(0,y) = \frac{U_0}{b^2}\,y\,(b-y)$$

9. El potencial en el plano *XZ* es independiente de *z* y esta dado por una función "paso" periódica de magnitud $2U_0$ y período $2a$ (como se muestra en la figura). Además, el plano $y = y_0$ es mantenido al potencial de tierra. Encontrar el potencial $U_{(x,y)}$ para todos los puntos de la región: $0 < y < y_0$.

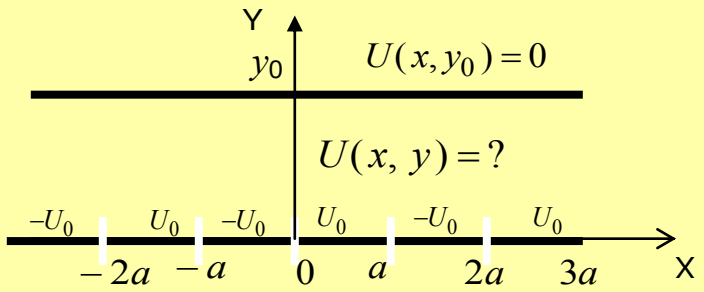


Figura 20.

10. En un disco de radio a se ha distribuido uniformemente una carga Q.

a) Encuentre el potencial electrostático en puntos del eje perpendicular que pasa por el centro del disco.

b) Expanda el resultado anterior en una serie, usando el binomio de Newton, y teniendo en cuenta la simetría azimutal halle $U(r, \phi)$ para $r < a$.

c) Halle $U(r, \phi)$ en la región $r > a$ y verifique que los primeros términos coinciden con la expansión multipolar.

11. Halle el potencial electrostático debido a un anillo con densidad lineal de carga para puntos del espacio $r < R$.

12. Se tiene dos electrodos hemisféricos de radio a; uno a potencial U_0 y el otro a potencial $-U_0$. Hallar el potencial en cualquier punto dentro de la esfera de radio a. Halle también el campo eléctrico en el centro del sistema.

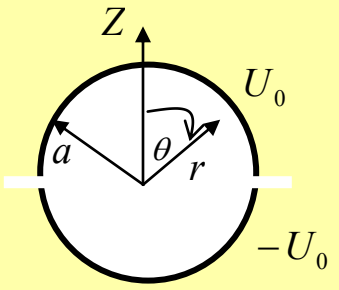


Figura 21.

13. Dos planos conductores infinitos son paralelos al plano *XY*. Uno de ellos está ubicado en $z = 0$ y es mantenido al potencial constante U_0 . El otro a potencial constante U_d , está ubicado en $z = d$. La región entre ellos está llena con una distribución volumétrica de carga:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{z}{d} \right)^2$$

Resolver la ecuación de Pöisson y encontrar $U_{(z)}$ para $0 < z < d$. Encontrar también la densidad superficial de carga sobre cada placa.

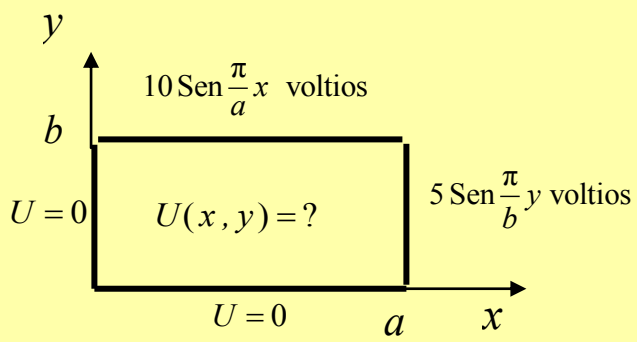
14. Se tiene dos superficies cilíndricas conductoras coaxiales de radios a y c mantenidos a los potenciales U_a y U_c respectivamente. La densidad volumétrica de carga entre las superficies está dada por la expresión:

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & ; \quad a < r < b \\ \\ \rho_0 & ; \quad b < r < c \end{cases}$$

Encontrar $U(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$ en la región $a < r < c$.

15. En una región donde hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ se coloca un cilindro conductor neutro de radio a y de longitud infinita, orientándose perpendicularmente al campo. Hallar $U(r, \phi)$ y $\vec{E}(r, \phi)$ en la región $r > a$. Halle también la densidad superficial de carga.

16 Hallar el potencial en el interior del tubo vacío infinito de sección transversal rectangular, sabiendo que el potencial en las fronteras es el indicado en la figura.



CAPITULO 4

IMÁGENES ELECTROSTÁTICAS Y FUNCIONES DE GREEN

4.1 INTRODUCCIÓN

Dada una distribución de carga $\{\lambda, \sigma, \rho, q_i\}$ podemos hallar el campo eléctrico y el potencial electrostático en cualquier punto del espacio utilizando los métodos descritos en el capítulo II; por ejemplo usando las expresiones:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \int dq' \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) \quad (1)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \quad (2)$$

El problema de encontrar una expresión para las superficies equipotenciales y graficarlas se resuelve haciendo:

$$U(\vec{r}) = \text{constante}$$

Veamos ahora los dos siguientes problemas generales:

Problema General I Se quiere hallar el potencial en la región $\Re$ limitada por dos superficies conductoras (equipotenciales) S_1 y S_2, a los potenciales U_1 y U_2 respectivamente; sabiendo que en la región mencionada no existe densidad volumétrica de carga.

Solución 1 Podríamos elegir un sistema de coordenadas adecuado para escribir la ecuación de Laplace, encontrar una solución general y luego buscar los coeficientes que satisfagan las condiciones de frontera. Esto es lo que se ha hecho en el capítulo anterior.

Solución 2 Cuando la geometría de los conductores es tal que resulta difícil describir matemáticamente sus superficies, podemos intentar solucionar este problema buscando (imaginando) una distribución de cargas tal que al hallar su potencial, usando la ec. (2) por ejemplo, resulten las condiciones de frontera dadas, es decir:

$$U(r) = U_1 \quad , \quad \text{para todo } \vec{r} \in S_1$$

$$U(r) = U_2 \quad , \quad \text{para todo } \vec{r} \in S_2$$

El potencial en la región $\Re$ es el potencial debido a esta distribución de carga "**imaginada"**. De acuerdo con el Teorema de la Unicidad no hay duda de que éste es el potencial correcto puesto que satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera.

Ejemplo 1a Para dos cargas puntuales Q y $-Q$ ubicadas en los puntos $\vec{r}_1 = (d\,,0\,,0)$ y $\vec{r}_2 = (-d\,,0\,,0)$, respectivamente, el potencial electrostático es:

$$U(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right\} \qquad (*)$$

y haciendo:

$$U(x,\,y,\,z) = U_1 \quad \text{ó} \quad U(x,\,y,\,z) = U_2 \quad , \quad \text{etc.}$$

podemos obtener las diferentes superficies equipotenciales cuyos gráficos en forma aproximada se muestran en la figura (1)

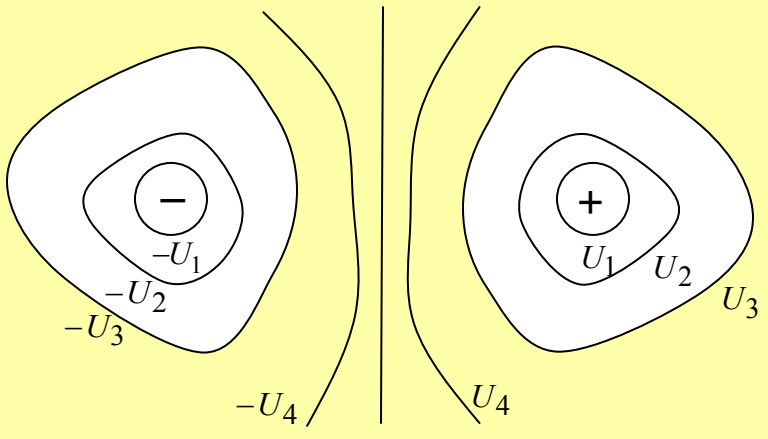


Figura 1. Superficies equipotenciales de cargas Q y $-Q$

Este que acabamos de resolver es un problema que se resuelve con técnicas del capítulo II. Lo que ahora nos proponemos es resolver el problema inverso, es decir:

Ejemplo 1b Dados los esferoides conductores S_{3-} y S_{2+} cuyos potenciales son $-U_3$ y U_2, respectivamente, encontrar el potencial en cualquier punto del espacio.

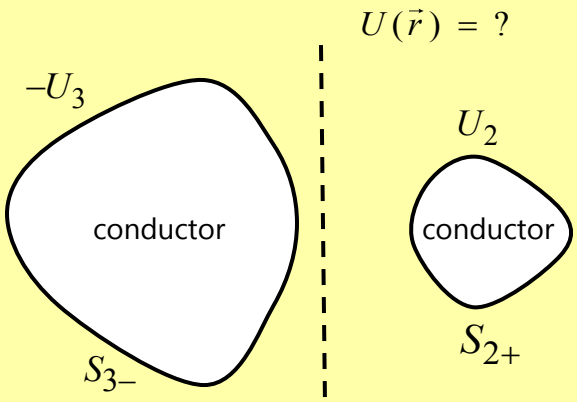


Fig. 2 Dos superficies conductoras a potenciales conocidos

Solución El potencial en cualquier punto fuera de los conductores es el mismo que el potencial debido a las dos cargas puntuales del problema anterior (ec. (*)) porque ésta satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera del presente problema. El potencial en cualquier punto dentro de cada conductor es el mismo que el de la superficie conductora que lo encierra.

Problema General II.- Dada una superficie conductora S_1 cuyo potencial es U_1 y una distribución de cargas, hallar el potencial en todo el espacio.

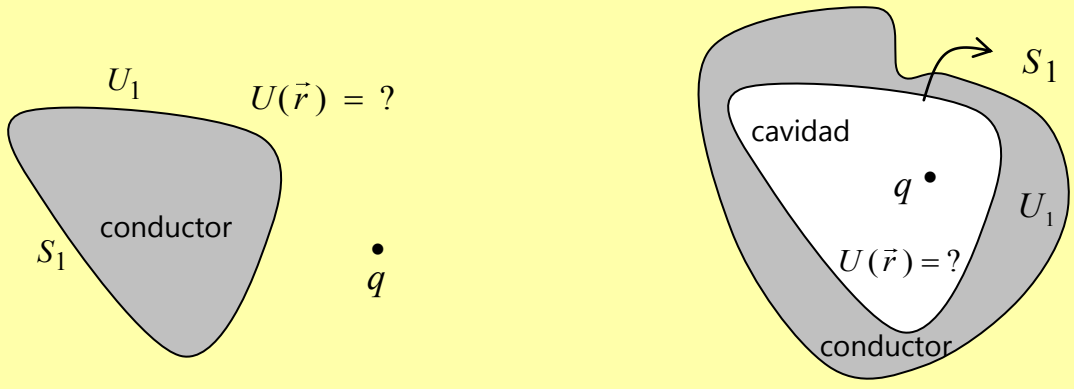


Fig. 3 Dos posibles problemas que se podrían resolver por técnica de imágenes electrostáticas

En estos casos el problema puede resolverse **imaginando** una distribución complementaria de cargas cuyo potencial superpuesto al de las cargas dadas sea tal que en la superficie S_1 el potencial sea U_1.

Las cargas "complementarias" que junto con las cargas dadas producen el potencial que satisface las condiciones de frontera del problema real se llaman **cargas imagen o imágenes electrostáticas**.

Si la carga imagen está encerrada por una superficie conductora entonces la carga neta de dicha superficie es igual a la carga imagen porque las líneas de fuerza que salen del (entran al) conductor son las mismas que saldrían de (entrarían a) la carga imagen. De igual manera, si en un conductor hueco hay encerrada una carga imagen Q_i y una carga real Q_r entonces en la superficie interna del conductor hay: $-(Q_i + Q_r)$ y en la superficie externa del conductor: $-(Q_i + Q_r) + Q$, donde Q es la carga neta del conductor.

4.2 IMÁGENES CILÍNDRICAS

Demostraremos en primer lugar que las superficies equipotenciales de dos líneas paralelas infinitas con densidades de carga lineal: λ y $-\lambda$ es una familia de superficies cilíndricas de longitud infinita.

El campo eléctrico debido a una línea infinita con densidad lineal de carga uniforme λ es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_\rho$$

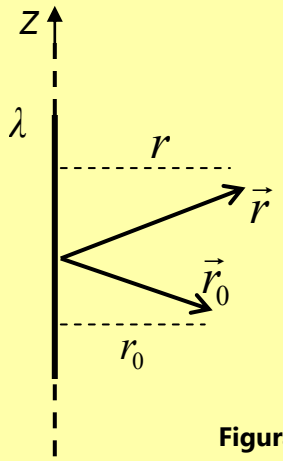


Figura 4

donde r es la coordenada cilíndrica ρ ,

es decir, la distancia desde el punto $\vec{r}$

hasta la línea infinita de carga que se supone coincide con el eje Z.

El potencial electrostático respecto a un punto $\vec{r}_0$ que dista r_0 a la línea de carga es:

$$U(\vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

El campo eléctrico debido a dos líneas paralelas e infinitas con carga por unidad de longitud λ y $-\lambda$ es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r})$$

donde:

$$\vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\hat{e}_{\rho_1}$$

$$\vec{E}_-(\vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\hat{e}_{\rho_2}$$

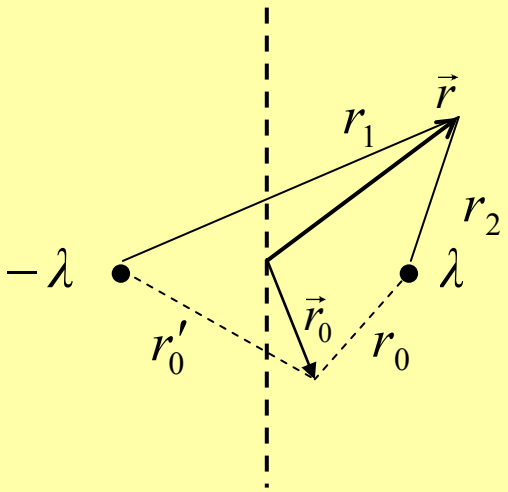


Figura 5

De igual manera podemos obtener una expresión para el potencial respecto al punto $\vec{r}_0$.

$$U(\vec{r}) = U_+(\vec{r}) + U_-(\vec{r})$$

donde:

$$U_+(\vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_0}$$

$$U_-(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r'_0}$$

La expresión para el potencial electrostático debido a las dos líneas de carga es entonces:

$$U(\vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1\, r'_0}{r_2\, r_0}$$

Para simplificar esta expresión elegimos como punto de referencia uno que equidiste de ambas líneas de carga; es decir, un punto tal que: $r_0 = r'_0$; de tal manera que debido a ambas líneas de carga el potencial electrostático respecto al plano paralelo intermedio es:

$$U(\vec{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_1}{r_2} \tag{3}$$

Nótese que el potencial en puntos muy alejados de ambas líneas (infinito) está dado también por la ec. (3) y se va haciendo cero.

De la ec. (3) y de la definición de superficies equipotenciales vemos que estas se obtienen cuando:

$$\frac{r_1}{r_2} = M = \text{constante} \tag{4}$$

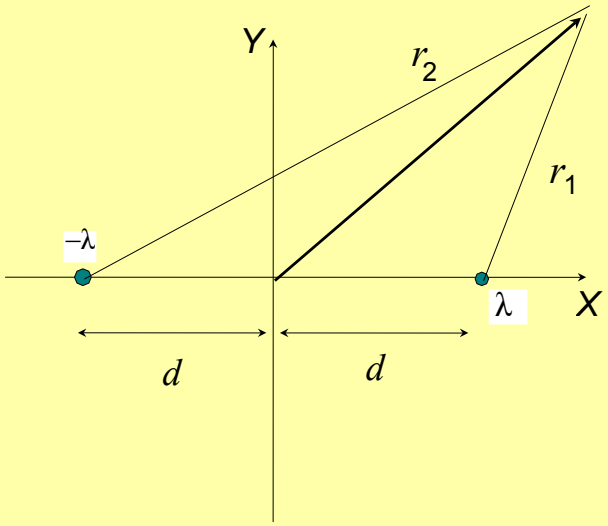


Figura 6

Obsérvese con ayuda de la figura (6) que:

M = 1 , corresponde al plano paralelo y equidistante a los hilos cargados. En esta superficie el potencial es cero.

M < 1 , corresponde a superficies con valores positivos de potencial y cuyos puntos están más cerca de la línea positiva.

M >1 , corresponde a superficies con valores negativos de potencial y cuyos puntos están más cerca de la línea negativa.

Para deducir la expresión matemática de las superficies equipotenciales elevamos al cuadrado ambos miembros de la ec. (4) teniendo en cuenta el sistema de coordenadas mostrado en la fig. (6):

$$\frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} = M^2 \qquad (5)$$

ó

$$x^2 - 2\,x\,d + d^2 + y^2 = M^2\,(x^2 + 2\,x\,d + d^2 + y^2)$$

Esta ecuación, completando cuadrados y reagrupando términos, se escribe:

$$\left\{ x - d\,\frac{1+M^2}{1-M^2} \right\}^2 + y^2 = \frac{4M^2d^2}{(1-M^2)^2} \qquad (6)$$

La ec. (6) representa una familia de cilindros infinitos cuyos ejes son paralelos al eje *Z*; y la intersección de estos cilindros con el plano *XY* (cualquier plano perpendicular a las líneas de carga) es una circunferencia cuyo centro es:

$$X_c = d\,\frac{1+M^2}{1-M^2} \qquad ; \qquad Y_c = 0 \qquad (7a)$$

El radio de los cilindros representados por la ec. (6) es:

$$R_c = \pm\,\frac{2Md}{1-M^2} \qquad (7b)$$

Para el caso M < 1, los cilindros están a la derecha del plano *YZ*, y las ecuaciones (7a) y (7b) son:

$$X_c = d + \frac{2M^2d}{1-M^2} \quad , \quad Y_c = 0 \quad , \quad R_c = \frac{2Md}{1-M^2} \qquad (8)$$

y para un valor M' > 1, siempre podemos escribir:

$$M' = \frac{1}{M} \quad ; \quad \text{donde } M < 1$$

Reemplazando este valor de M' en las ecuaciones (7a) y (7b), tenemos para las superficies equipotenciales que están a la izquierda del plano *YZ*:

$$X_c = -d - \frac{2M^2 d}{1 - M^2} \quad , \quad Y_c = 0 \quad , \quad R_c = \frac{2M\,d}{1 - M^2} \tag{9}$$

En resumen podemos decir que, dada dos líneas infinitas paralelas con densidad lineal de carga λ y $-\lambda$, las superficies equipotenciales son cilindros de longitud infinita cuya posición y radio dependen del parámetro M, a través de las ecuaciones (8) y (9). Para cada valor del parámetro M < 1 existen dos superficies equipotenciales, una a cada lado del plano paralelo intermedio, ambas con igual radio, con el mismo valor absoluto de potencial pero con signos diferentes. El potencial de cada superficie y el parámetro M se relacionan por la ecuación:

$$U = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln M \,.$$

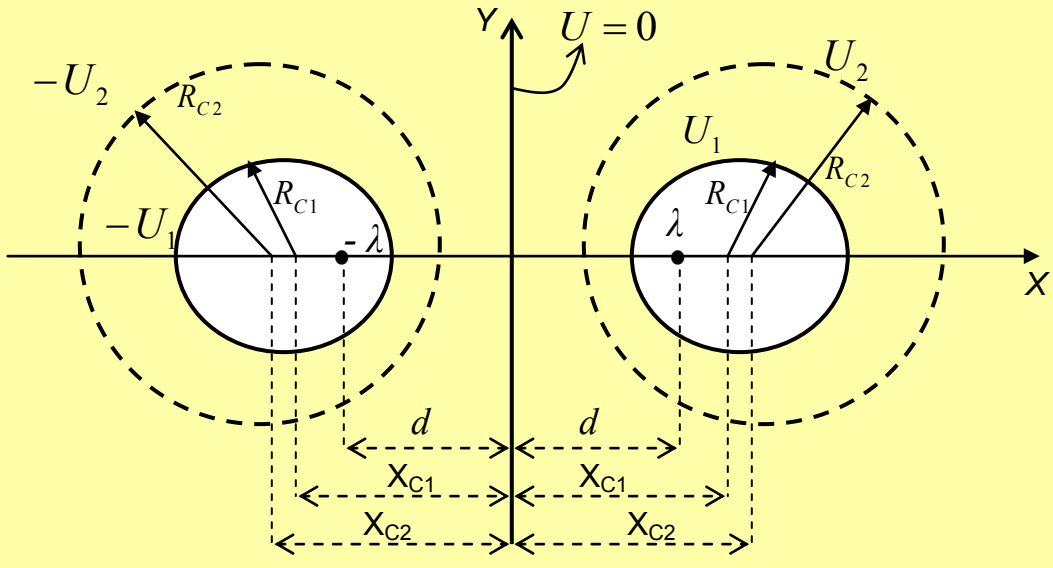


Figura 7 Algunas superficies equipotenciales correspondientes a dos líneas infinitas con densidades de carga λ y $-\lambda$

Habiendo resuelto el problema de hallar las superficies equipotenciales pasamos a resolver los siguientes problemas de imágenes electrostáticas:

Ejemplo 2 Se tienen dos cilindros conductores infinitos y paralelos con el mismo radio R_C. Sus ejes están separados una distancia h y sus potenciales son U_0 y $-U_0$. Hallar el potencial electrostático en cualquier punto fuera de los cilindros.

Solución En el interior de los cilindros conductores el potencial es U_0 y $-U_0$ respectivamente.

Para encontrar el potencial en la región externa a ambos cilindros buscamos una distribución de carga tal que al evaluar su potencial las superficies conductoras dadas (cilindros) resulten superficies equipotenciales a los valores de potencial dados.

De acuerdo con el problema anterior sabemos que para dos líneas cargadas λ y $-\lambda$ las superficies equipotenciales son cilindros cuyos radios y ubicación vienen dados por las ecuaciones:

$$X_c = d + \frac{2M^2 d}{1-M^2} \quad , \quad R_c = \frac{2M\,d}{1-M^2} \tag{10}$$

También sabemos que un valor de M especifica dos superficies equipotenciales con el mismo valor de potencial pero de signos contrarios.

Así que los cilindros conductores dados en este problema son superficies equipotenciales de líneas de carga λ y $-\lambda$, ya conocemos R_C y $X_C(=h/2)$ y con estos datos podemos despejar de la ec. (10) los valores de d y M.

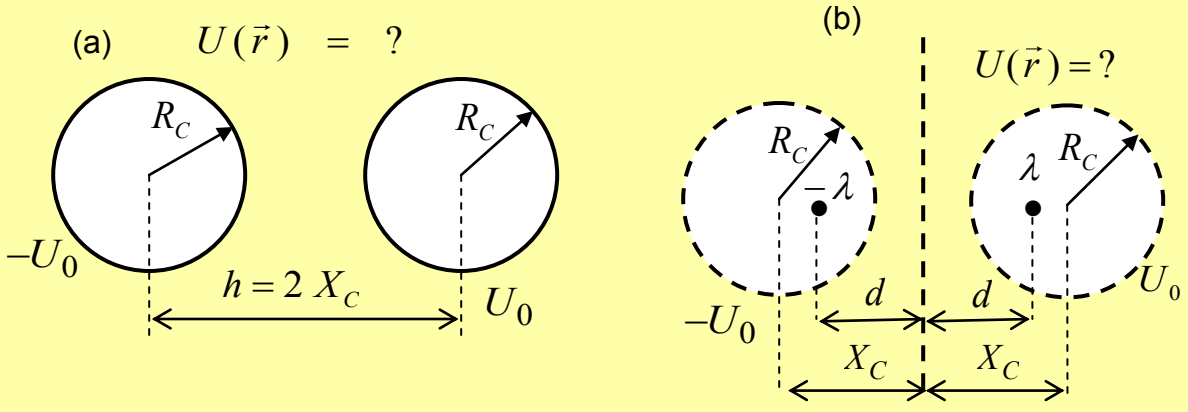


Fig. 8 Hallar el potencial debido a dos cilindros conductores:
(a) problema real, (b) problema equivalente

El valor de d encontrado dará la ubicación de las líneas de carga y el valor de M permite encontrar la densidad lineal de carga:

$$\lambda = -U_0 \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln M} \tag{11}$$

Resolviendo las ecs. (10) se obtienen los valores de d y M son:

$$M = \frac{X_c}{R_c} - \sqrt{\frac{X_c^2}{R_c^2} - 1} \quad ; \quad d = R_c \frac{1 - M^2}{2M} \tag{12}$$

Utilizando la ec. (11) y la ec. (3) podemos escribir la expresión para el potencial electrostático debido a dos cilindros conductores infinitos cuya diferencia de potencial es $2U_0$:

$$U(x,y) = \frac{U_0}{\ln M} \ln\left[\frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} \right]^{1/2} \tag{13}$$

Habiendo encontrado el potencial electrostático se pueden encontrar otras cantidades de interés como el campo eléctrico, la densidad superficial de carga en las superficies cilíndricas, etc.

Ejemplo 3 Se tiene un cilindro conductor de radio R_C, a potencial U_0 y con su eje a una distancia X_C de una placa conductora conectada a Tierra. Hallar el potencial en cualquier punto del espacio.

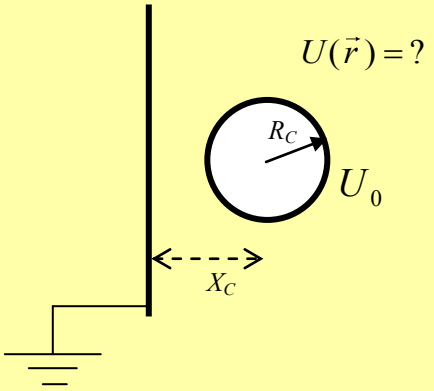


Figura 9

Solución Es sencillo constatar que en la región $x < 0$ (plano a Tierra lo hacemos coincidir con plano *YZ*) el potencial y el campo eléctrico son nulos.
Las superficies frontera de este problema (plano y cilindro) son superficies equipotenciales correspondientes al sistema de dos hilos con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$, por lo tanto, la solución a este problema es la misma que la del problema anterior, (ec. 13), pero restringida a la región comprendida entre el plano y el cilindro. A partir de esta solución se puede encontrar las densidades superficiales de carga en el cilindro y en el plano, y se puede verificar que por unidad de longitud las cargas son λ y $-\lambda$ respectivamente.

Ejemplo 4. Consideremos un hilo con densidad lineal de carga $-\lambda$ frente a un cilindro conductor de radio R_C con densidad lineal de carga λ. Se sabe que la distancia entre el eje del cilindro y la línea de carga es D. ¿Cuál sería la posición de una línea de carga que reemplace al cilindro conductor?

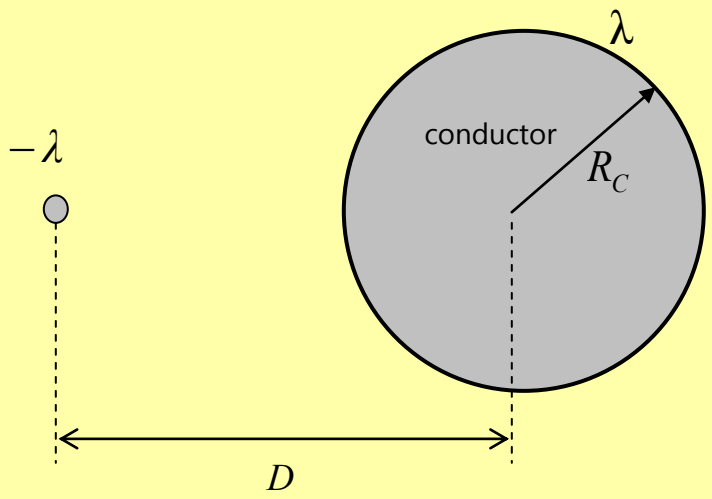


Figura 10 Hallar el potencial en el espacio comprendido entre el hilo con carga $-\lambda$ y el conductor con densidad superficial de carga equivalente a una densidad lineal de carga λ

Solución:
Imaginamos a la línea de carga como un cilindro conductor de radio casi cero. Para que ambos tengan cargas λ y $-\lambda$ es conveniente suponer que ambos están

conectados a una batería de modo que la carga sólo es trasladada de uno a otro cilindro. Enmarcamos los datos de este problema en la geometría de la figura 7.

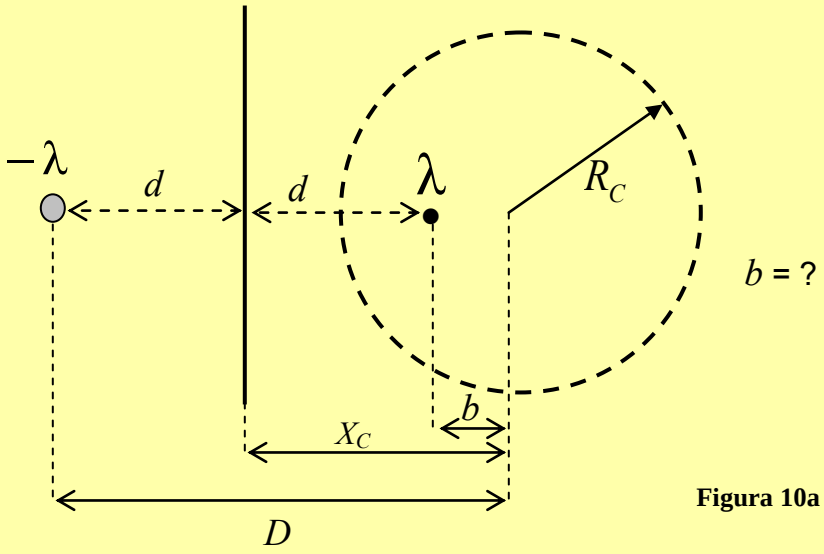


Figura 10a

De acuerdo con las ecuaciones (7a) y (7b)

$$X_c = d\,\frac{1 + M^2}{1 - M^2}$$

$$R_c = \frac{2M\,d}{1 - M^2} \qquad (*)$$

De lo cual se obtiene, observando también figura (10a) que:

$$D = X_c + d = \frac{2\,d}{1 - M^2} \qquad (**)$$

De (*) y (**) obtenemos las siguientes relaciones:

$$M = \frac{R_c}{D} \qquad \text{y} \qquad d = \frac{D^2 - R^2}{2D}$$

La distancia b del eje del cilindro conductor a la posición de la línea imagen λ es:

$$b = D - 2\,d \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{R_C^2}{D}}$$

Ejemplo 5. Los ejes de dos cilindros conductores macizos son paralelos y distan entre sí D. Están conectados a una batería cuyo voltaje podemos designar por ΔU. Hallar la posición de las líneas de carga λ y $-\lambda$ que reemplacen a este sistema electrostático.

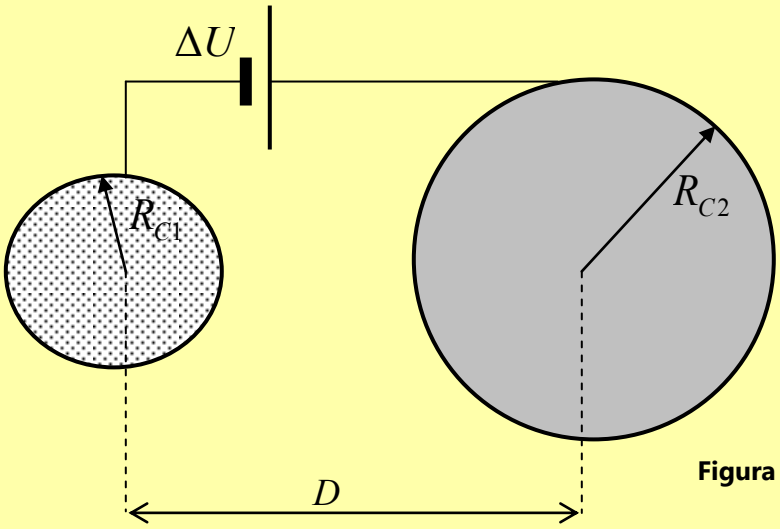


Figura 11

Solución: Comparando figura (11) con figura (7) podemos plantear el problema actual en la siguiente forma:

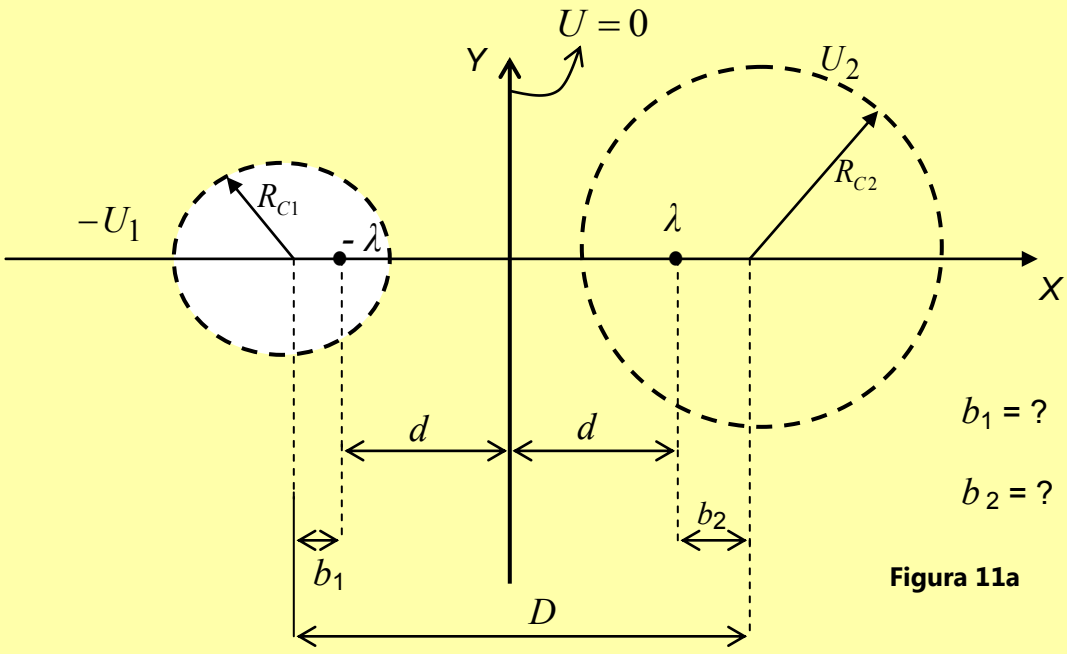


Figura 11a

De acuerdo con el resultado del ejercicio anterior:

$$b_2 = \frac{R_{C2}^2}{D - b_1} \quad \text{y} \quad b_1 = \frac{R_{C1}^2}{D - b_2}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir también en la forma:

$$b_1^2 - \frac{(D^2 - R_{C2}^2 + R_{C1}^2)}{D} b_1 + R_{C1}^2 = 0$$

$$b_2^2 - \frac{(D^2 - R_{C1}^2 + R_{C2}^2)}{D} b_2 + R_{C2}^2 = 0$$

Resultando:

$$b_1 = \frac{(D^2 - R_{C2}^2 + R_{C1}^2)}{2D} - \left\{ \left(\frac{D^2 - R_{C2}^2 + R_{C1}^2}{2D} \right)^2 - R_{C1}^2 \right\}^{1/2}$$

$$b_2 = \frac{(D^2 - R_{C1}^2 + R_{C2}^2)}{2D} - \left\{ \left(\frac{D^2 - R_{C1}^2 + R_{C2}^2}{2D} \right)^2 - R_{C2}^2 \right\}^{1/2}$$

4.4 CARGA PUNTUAL Y ESFERA CONDUCTORA

Ejemplo 6 Se tiene una esfera conductora de radio a conectada a Tierra. A una distancia d de su centro ($d > a$) se coloca una carga puntual q. Hallar el potencial electrostático en cualquier punto del espacio.

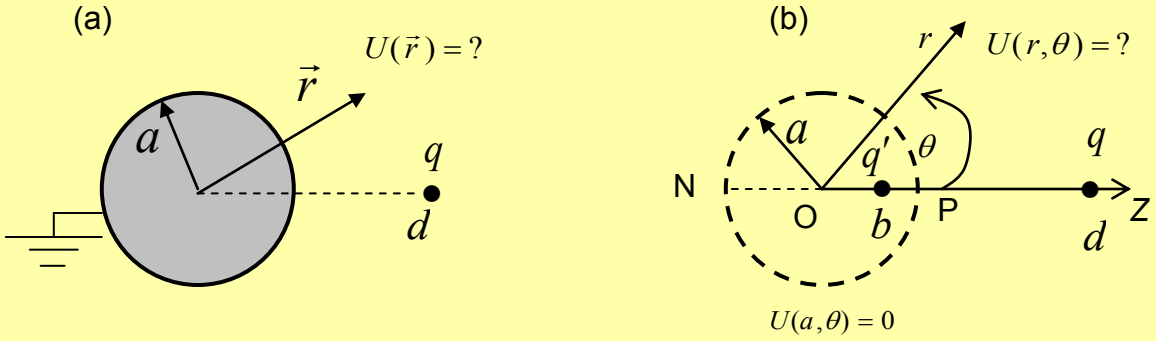


Figura 12 Esfera conductora a Tierra y carga puntual
(a) problema real, (b) problema equivalente

Solución: Sea la esfera conductora maciza o hueca sin carga en su interior, en la región $r < a$, el campo eléctrico es nulo y $U(r = a) = 0$. Luego: $U(r,\theta) = 0$.

Resolver este problema en la región $r > a$ es equivalente a resolver el siguiente: "Hallar el potencial debido a q y a carga(s) imagen de tal manera que $U(a,\theta) = 0$".

Para esto razonamos así:

Llamemos $\vec{r}_1 = (0,0,d)$ a la ubicación de la carga q. Suponer que basta una carga imagen q' ubicada en algún punto $\vec{r}_2$. Se tendrá entonces:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right\} \tag{13}$$

Si q' no estuviera en la recta O$\vec{r}_1$, se tendría componente tangencial de $\vec{E}$ en los puntos P y N; luego: la carga imagen q' está ubicada en la recta que une el centro de la esfera con la carga puntual q; es decir: $\vec{r}_2 = (0,0,b)$.

Para hallar el valor de q' y su posición, b, tengamos en cuenta que:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{d-a} + \frac{q'}{a-b}\right\} = 0 \tag{13a}$$

$$U(N) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{d+a} + \frac{q'}{b+a}\right\} = 0 \tag{13b}$$

De las ecuaciones (13a) y (13b) se deduce:

$$q' = -\frac{a}{d}\,q \tag{14}$$

$$b = \frac{a^2}{d} \tag{15}$$

$$\vec{r}_2 = \left(0\,,0\,,\frac{a^2}{d}\right) \tag{15a}$$

Ahora podemos escribir la ec. (13) en coordenadas esféricas:

$$U(r\,,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\,\mathrm{Cos}\,\theta}} - \frac{q\,\frac{a}{d}}{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{d^2}-\frac{2ra^2}{d}\,\mathrm{Cos}\,\theta}}\right\} \tag{16}$$

Haciendo $r = a$ en la ecuación (16) puede verificarse que el potencial es nulo en la esfera conductora y por lo tanto el potencial en cualquier punto de la región $r > a$ es efectivamente dado por la ec. (16).

Después de haber encontrado el potencial electrostático pueden plantearse las siguientes preguntas:

a) El campo eléctrico en la región $r > a$.
b) La densidad superficial de carga en la esfera conductora.
c) La carga total en el conductor.
d) La fuerza sobre la esfera conductora a Tierra.
e) El trabajo hecho para traer la carga puntual desde infinito hasta el punto (0,0,d) en presencia de la esfera conductora a Tierra.

Pasemos a evaluar cada una de estas cantidades:

a) $\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_\theta \hat{e}_\theta = -\vec{\nabla} U$

Usando la ec. (16) y la expresión para el gradiente en coordenadas esféricas obtendremos:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q\left(r - d\,Cos\,\theta\right)}{\left(r^2 + d^2 - 2\,r\,d\,Cos\,\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q\,\frac{a}{d}\left(r - \frac{a^2}{d}\,Cos\,\theta\right)}{\left(r^2 + \frac{a^4}{d^2} - \frac{2\,r\,a^2}{d}\,Cos\,\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q\,d\;Sen\,\theta}{\left(r^2 + d^2 - 2\,r\,d\;Cos\,\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q\;\frac{a^3}{d^2}\;Sen\,\theta}{\left(r^2 + \frac{a^4}{d^2} - \frac{2\,r\,a^2}{d}\;Cos\,\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

El estudiante puede verificar, haciendo r = a, que en la superficie conductora misma E_θ es nulo, es decir, el campo en la superficie conductora es radial.

b) Usando la expresión $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$ tenemos:

$$\sigma\big|_{r=a} = \sigma(\theta) = \varepsilon_0 E_r\big|_{r=a}$$

porque en este caso $\hat{n} = \hat{e}_r$. Luego:

$$\sigma(\theta) = -\frac{q\left(d^2 - a^2\right)}{4\pi a\left(d^2 + a^2 - 2\,a\,d\,\mathrm{Cos}\,\theta\right)^{3/2}}$$

c) La carga total puede obtenerse evaluando la integral:

$$Q_{esf} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta)\, a^2 \ \mathrm{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

Reemplazando σ por la expresión obtenida en la parte (b) tendremos:

$$Q_{esf} = -q\,\frac{a}{d}$$

Nótese que la carga sobre la superficie de la esfera conductora es igual a la carga imagen q', como debe ser puesto que las líneas de fuerza que atraviesan la superficie $r = a$ son las mismas sea que exista realmente q' o que exista la esfera conductora a Tierra.

d) La fuerza $\vec{F}$ sobre la esfera es de igual magnitud y sentido contrario a la fuerza sobre la carga q, la cual es debida a la carga de la esfera o a la carga imagen q'. Es decir:

$$\vec{F} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2\,\dfrac{a}{d}}{\left(d - \dfrac{a^2}{d}\right)^2}\,\hat{k}$$

e) En una posición arbitraria $\vec{r}$, mientras traemos la carga q desde infinito, la fuerza sobre q es:

$$\vec{F} = -\frac{q^2\, a}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{\left(r^2 - a^2\right)^2}\,\hat{e}_r$$

El trabajo contra esta fuerza desde infinito hasta $(0,0,d)$ es:

$$W = +\frac{q^2\, a}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{d} \frac{r\, dr}{\left(r^2 - a^2\right)^2}$$

$$W = -\frac{q^2\, a}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left(d^2 - a^2\right)}\right\}$$

Ejemplo 7 Se tiene una esfera conductora de radio a con carga neta Q. A una distancia d de su centro ($d > a$) se coloca una carga puntual q. Hallar el potencial electrostático en cualquier punto del espacio.

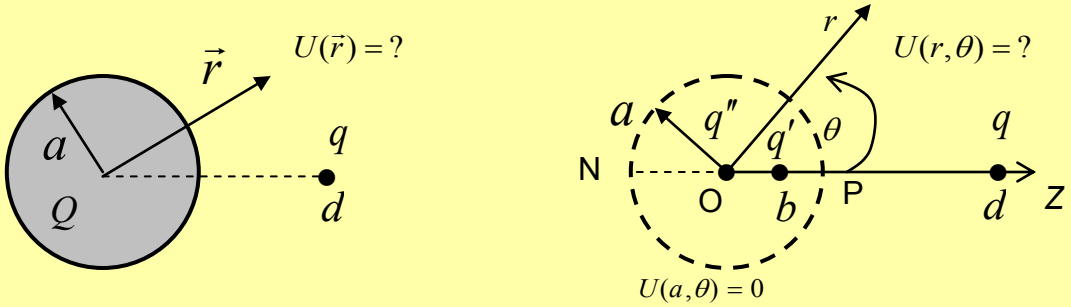


Figura 13 Esfera conductora con carga Q y carga puntual q
(a) problema real, (b) problema equivalente

Solución. En la región $r < a$ no hay carga, se satisface la ecuación de Laplace y puede verificarse que el potencial es uniforme e igual al potencial en la superficie $r = a$.

Para resolver el problema en la región $r > a$, usamos el hecho conocido de que debido a las cargas q y q' ubicadas en (0,0,d) y (0,0,b), respectivamente, la superficie $r = a$ es equipotencial con $U = 0$. Una carga imagen q'' en el origen permite que la superficie $r = a$ siga siendo equipotencial con otro valor para U. Para satisfacer la condición de que la esfera de radio a encierra una carga neta Q debe cumplirse:

$$q' + q'' = Q \qquad \text{ó} \qquad q'' = Q + q\frac{a}{d}$$

El potencial es entonces:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|} + \frac{q'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|} + \frac{q''}{r}\right\}$$

Es decir, el potencial es igual al del ejemplo anterior (ec (16)) más el potencial debido a q''.

$$U(\vec{r}) = U_{anterior} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q + q\frac{a}{d}}{r}\right\}$$

El campo eléctrico:

$$E_r = E_{r\ anterior} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q + q\frac{a}{d}}{r^2}\right\}$$

$$E_\theta = E_{\theta\ anterior}$$

La densidad superficial de carga:

$$\sigma(\theta) = \sigma(\theta)_{anterior} + \frac{Q + q\frac{a}{d}}{4\pi a^2}$$

La fuerza sobre la esfera conductora:

$$\vec{F} = \vec{F}_{anterior} - \frac{\left(Q + q\frac{a}{d}\right)q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{k}$$

El trabajo para traer la carga q desde infinito en presencia de la esfera conductora con carga neta Q es:

$$W = W_{anterior} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{q^2 a}{8\pi\varepsilon_0 d^2}$$

NOTA: En los ejemplos (6) y (7) todos los resultados obtenidos son válidos sea la esfera conductora maciza o hueca de radio externo a.

Ejemplo 8 Se tiene un conductor de forma arbitraria con una cavidad esférica de radio a conectado a Tierra. A una distancia d del centro de la cavidad ($d < a$) se coloca una carga puntual q. Hallar el potencial en cualquier punto del espacio.

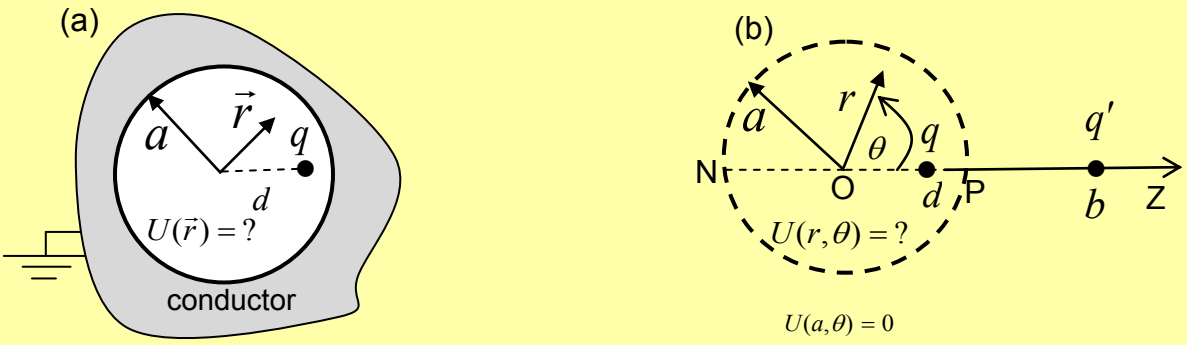


Figura 14 Carga puntual dentro de cavidad esférica en un conductor a Tierra (a) problema real, (b) problema equivalente

Solución: En la región $r > a$ el problema es típico del capitulo III con condiciones de frontera: $U(a) = 0$ y $U(\infty) = 0$; luego: $U(r,\theta) = 0$.

Para la cavidad del conductor (región $r < a$) resolvemos el problema buscando los valores de una carga imagen q' y su posición (0,0,b) de tal manera que la superficie $r = a$ sea equipotencial con $U = 0$. Con la notación mostrada en la fig. (14) encontramos:

$$q' = -q\frac{a}{d} \qquad ; \qquad b = \frac{a^2}{d}$$

Nótese que hemos escogido la nomenclatura adecuada para obtener expresiones idénticas a las del ejemplo (6); pero en este caso $|q'| > q$ y $b > d$; al revés del ejemplo mencionado.

El potencial electrostático está entonces dado por la ec. (16) pero con restricción a valores $r < a$.

El campo eléctrico tiene también la misma expresión que la del ejemplo 6.

La densidad superficial de carga es ahora:

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 E_r\Big|_{r=a}$$

porque en este caso $\hat{n} = -\hat{e}_r$. Luego:

$$\sigma(\theta) = \frac{q\left(d^2 - a^2\right)}{4\pi a\left(d^2 + a^2 - 2\,a\,d\,\mathrm{Cos}\,\theta\right)^{3/2}}$$

La carga total inducida que se obtiene al evaluar la integral

$$Q_{esf} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\,\sigma(\theta)\,\right]a^2\,\mathrm{Sen}\theta\,d\theta\,d\phi$$

es:

$$Q_{esf} = -q$$

lo cual es razonable físicamente porque de la esfera no salen líneas de fuerza; el flujo, y por lo tanto la carga encerrada es cero.

Para calcular la fuerza $\vec{F}$, sobre la esfera, podemos calcular la fuerza sobre q y cambiarle de signo.

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2\,\dfrac{a}{d}}{\left(\dfrac{a^2}{d}-d\right)^2}\,\hat{k}$$

El estudiante puede evaluar el trabajo que se haría contra $\vec{E}$ para llevar la carga puntual q desde el centro de la esfera hasta la posición (0,0,d).

$$W = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{d^2}{a^2 - d^2}$$

Ejemplo 9 Se tiene un conductor esférico hueco de radio interno a y radio externo b con carga neta Q. A una distancia d de su centro ($d < a$) se coloca una carga puntual q. Hallar el potencial en cualquier punto del espacio.

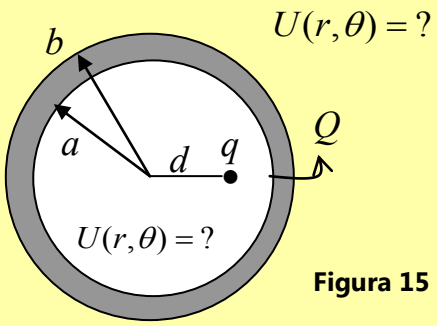


Figura 15

Solución: Para comprender este problema considérese que el conductor esférico ha adquirido su carga Q en un proceso de dos pasos:

i) La carga q está en ($0,0,d$) y conectamos la esfera conductora a Tierra. Estamos entonces en el caso del ejemplo 8, es decir hay una carga $q' = -q$ distribuida sobre la superficie $r = a$ según la expresión para $\sigma(\theta)$ del ejemplo anterior. Este sistema de cargas no produce ningún campo fuera de la esfera $r = a$.

Desconectamos la esfera de Tierra y agregamos al conductor carga $q + Q$. Esta carga se distribuye uniformemente en la superficie externa del conductor ($r = b$). En consecuencia podemos decir que:

En la región $r > a$ el potencial electrostático y el campo eléctrico se deben únicamente a la carga $Q + q$ distribuida sobre la esfera de radio b.

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r} \quad ; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{r^2}\hat{e}_r$$

En la región $a < r < b$ el campo es cero y el potencial constante:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{b}$$

En la región r < a el potencial es la constante que acabamos de escribir más el potencial de las cargas q y q', es decir.

$$U(\vec{r}) = U_{ejemplo\,8} + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0\, b}$$

Todas las demás cantidades (Fuerza sobre q, campo eléctrico, $\sigma(\theta)$ y trabajo sobre q) que hemos obtenido en el ejemplo 8 son válidas para el presente ejemplo.

4.4 PLACA CONDUCTORA INFINITA Y CARGA PUNTUAL

Ejemplo 10 Se tiene una placa conductora infinita conectada a Tierra y a una distancia d se coloca una carga puntual q. Hallar el potencial y el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

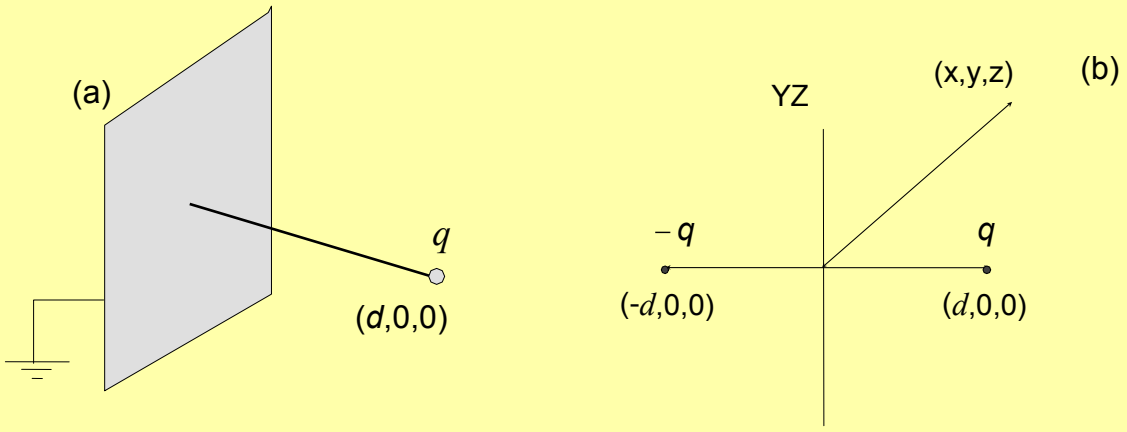


Figura 16 Placa conductora a Tierra frente a carga puntual:
(a) Problema real, (b) problema equivalente

Solución.- Tierra y la placa conductora infinita forman un solo "gran conductor" neutro. Al colocar la carga q cerca de la placa las cargas libres de este "gran conductor" se redistribuyen quedando el plano cargado con carga de signo contrario a q. El campo que queremos hallar es el campo debido a q y a la distribución de cargas sobre el plano. Dicho campo puede describirse por líneas de fuerza que salen de q y terminan en el plano conductor infinito (si q es positiva).

En la región $x < 0$ no hay líneas de fuerza, $\vec{E} = 0$ y como $U(x = 0)$, el potencial es nulo en toda esta región.

Para hallar el potencial en la región $x > 0$ podemos hacerlo buscando el valor y posición de una carga imagen tal que su potencial superpuesto al de q resulte nulo en el plano *YZ*.

Si designamos la posición de q por $\vec{r}_1 = (d,0,0)$, es intuitivo que una carga $q' = -q$ ubicada en $\vec{r}_2 = (-d,0,0)$ satisface la condición requerida. Luego:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right\}; \qquad x \geq 0$$

ó

$$U(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} - \frac{q}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\}; \qquad x \geq 0$$

Puede verificarse que cuando $x = 0$ efectivamente se obtiene $U(0, y, z) = 0$.

El campo eléctrico se puede obtener tomando el gradiente al potencial o superponiendo el campo de las dos cargas puntuales:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q(x-d,y,z)}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{q(x+d,y,z)}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

La densidad superficial de carga en el plano *YZ* es:

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = \varepsilon_0 E_x \Big|_{x=0}$$

porque en este caso $\hat{n} = \hat{i}$. Luego:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q\,(-d)}{\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{q\,(d)}{\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right\}$$

$$\sigma = -\frac{q\,d}{2\pi\left(d^2+r^2\right)^{3/2}}$$

donde $r^2 = y^2 + z^2$.

Podemos evaluar la carga total en la placa conductora evaluando la integral:

$$Q_{placa} = \iint \sigma\, da = -\frac{q\,d}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\phi}{\left(d^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$Q_{placa} = -q$$

La fuerza $\vec{F}$ que la carga q ejerce sobre la placa es del mismo valor pero de sentido contrario a la fuerza que la placa (o la imagen q') ejerce sobre la carga q:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4\,d^2}\,\hat{i}$$

El trabajo contra $\vec{E}$ para traer la carga q desde infinito hasta (d,0,0) en presencia de la placa a Tierra es:

$$W = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\,d}$$

4.5 MÉTODO DE LAS FUNCIONES DE GREEN EN ELECTROSTÁTICA

4.5.1 TEOREMA DE GREEN

Aplicando el teorema de la divergencia a un campo “escogido” podemos obtener una relación muy importante en electrostática:

$$\iiint_V \operatorname{div}\left\{\Phi(\vec{\nabla}\Psi) - \Psi(\vec{\nabla}\Phi)\right\} dV = \oiint_S \left\{\Phi(\vec{\nabla}\Psi) - \psi(\vec{\nabla}\Phi)\right\} \cdot d\vec{a}$$

Usando la identidad vectorial: $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}\vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$, tenemos

$$\iiint_V \left[\Phi(\nabla^2\Psi) - \Psi(\nabla^2\Phi)\right] dV = \oiint_S \left\{\Phi(\vec{\nabla}\Psi) - \psi(\vec{\nabla}\Phi)\right\} \cdot d\vec{a} \qquad (17)$$

Esta expresión es conocida como el teorema de Green.

Identificando Φ y ψ con funciones muy conocidas en electrostática:

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \text{y} \qquad \Psi = U$$

tendremos:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial U}{\partial n'} - U \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} da' \qquad (18)$$

que es la solución general a la ecuación de Pöisson cuando se conoce la densidad de carga y el potencial y/o su derivada normal en la frontera.

4.5.2 FUNCIONES DE GREEN

En general, en Física matemática, una función de Green describe la respuesta de un sistema físico a un estímulo bien localizado en un punto del espacio o en un instante bien definido. En el caso particular de la electrostática una función de Green describe el potencial respuesta de un sistema electrostático que inicialmente

satisfacía la ecuación de Laplace y que luego es perturbado colocando una carga puntual unidad en algún punto $\vec{r}'$. Esto significa que las funciones de Green que nos interesan en electrostática satisfacen la ecuación de Pöisson:

$$\nabla'^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\,\delta(\vec{r},\vec{r}') \tag{19}$$

Una solución básica a ésta es:

$$G_b(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|},$$

pero en general se usarán funciones:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} + f(\vec{r},\vec{r}')$$

donde $f(\vec{r},\vec{r}')$ satisface la ecuación de Laplace.

La ecuación (18) es escrita más generalmente en la forma:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,dV' + \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)G(\vec{r},\vec{r}') - U(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left\{G(\vec{r},\vec{r}')\right\}\right]da' \tag{20}$$

Se puede aprovechar la libertad para elegir la función de Green con el objeto de resolver determinado tipo de problemas.

Por ejemplo, para resolver problemas con condiciones de frontera de Dirichlet conviene utilizar una función de Green que satisfaga:
$G_D(\vec{r},\vec{r}') = 0$, para todo $\vec{r}$ en la superficie de la frontera.

En este caso la ecuación (20) se escribirá:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}')\,G_D(\vec{r},\vec{r}')\,dV' - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left[U(\vec{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\left\{G_D(\vec{r},\vec{r}')\right\}\right]da' \tag{21}$$

y para resolver problemas con condiciones de frontera de Neumann es conveniente usar funciones de Green $G_N(\vec{r},\vec{r}')$ tales que:

$$\frac{\partial}{\partial n'}\left[G_N(\vec{r},\vec{r}')\right] = \frac{4\pi}{S}$$

de modo que:

$$U(\vec{r}) = U_{prom} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}')\,G_N(\vec{r},\vec{r}')\,dV' +$$

$$\frac{1}{4\pi}\oiint_S \left[G_N(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left[U(\vec{r}')\right]\right] da' \qquad (22)$$

4.5.3 FUNCIONES DE GREEN PARA FRONTERAS ESFÉRICAS

Según lo visto en el ejemplo (6), el potencial de una carga unidad y su imagen constituyen una función que satisface la ecuación (19) y que se anula en la frontera.

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{a}{r'\left|\vec{r}-\frac{a^2}{r'}\vec{r}'\right|}$$

o en coordenadas esféricas:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\sqrt{r^2+r'^2-2\,r\,r'\cos\gamma}} - \frac{q\,\frac{a}{d}}{\sqrt{\frac{r^2\,r'^2}{a^2}+a^2-2\,r\,r'\,Cos\,\gamma}}\right\}$$

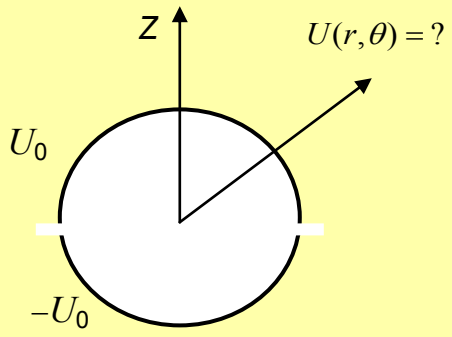
$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{r'=a} = -\frac{(r^2-a^2)}{a\,(r^2+a^2-2\,a\,r\,Cos\,\gamma)^{3/2}}$$

donde $\mathrm{Cos}\gamma = \mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta' + \mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Sen}\theta'\,Cos(\phi-\phi')$; γ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$

En particular, para problemas con densidad de carga nula y valores de potencial en una superficie esférica (Dirichlet) tendremos de la ecuación (21):

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[U(a,\theta',\phi') \frac{a\left(r^2 - a^2\right)}{a\left(r^2 + a^2 - 2a\, r\cos\gamma\right)^{3/2}} \right] \mathrm{Sen}\,\theta'\, d\theta'\, d\phi' \qquad (23)$$

Ejemplo 11 Hallar el potencial electrostático en el exterior de una esfera conductora con hemisferios a potenciales $\pm\, U_0$.



Solución: Reemplazando

$$U(a,\theta') = \begin{cases} U_0\,, & \text{si } 0 < \theta < \pi/2 \\ \\ -U_0 & \text{si } \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

en la ecuación (23) obtenemos:

$$U(r,\theta) = \frac{U_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_0^{\pi/2} \mathrm{Sen}\,\theta'\, d\theta' - \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{Sen}\,\theta'\, d\theta' \right\} \frac{a\,(r^2 - a^2)}{a\left(r^2 + a^2 - 2a\, r\,\mathrm{Cos}\,\gamma\right)^{3/2}}$$

Esta integral no es sencilla, pero para el caso particular en que $\theta = 0$, es decir $\gamma = \theta'$ se tiene:

$$U(z) = U_0 \left\{ 1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right\}$$

Para valores fuera del eje *Z* se puede obtener una expresión en forma de serie:

$$U(r,\theta) = \frac{3\,U_0\, a^2}{2\, r^2} \left\{ \mathrm{Cos}\,\theta - \frac{7\, a^2}{12\, r^2} \left(\frac{5}{2}\mathrm{Cos}^3\theta - \frac{3}{2}\,\mathrm{Cos}\,\theta \right) + \cdots \right\}$$

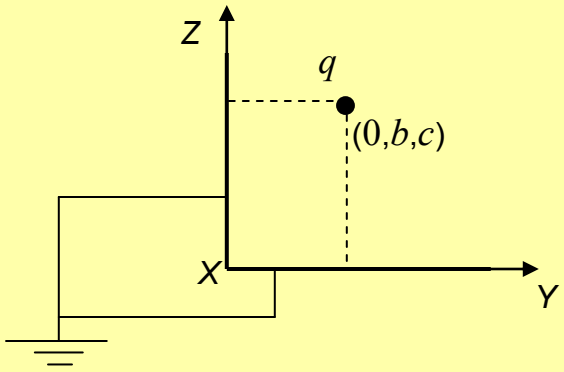
PROBLEMAS

1. Se conecta a Tierra una armadura consistente de dos semiplanos conductores infinitos que se intersectan formando un ángulo recto.

a) ¿Cuál es la fuerza sobre la armadura si colocamos una carga puntual en el punto $(0,b,c)$?

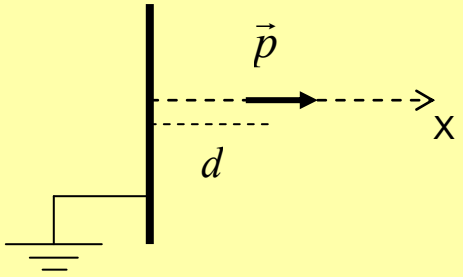
b) Demuestre que la carga total de una de las placas es:

$$Q_{placa} = -\frac{2q}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{c}{b}$$



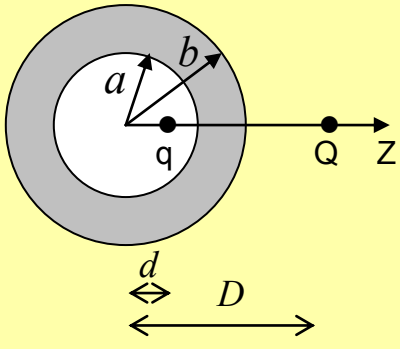
2. Un dipolo eléctrico $\vec{p}$ es orientado perpendicularmente y a una distancia d de una placa conductora infinita conectada a Tierra.

Calcular el campo eléctrico que produce la distribución de carga inducida en la placa en la posición del dipolo.

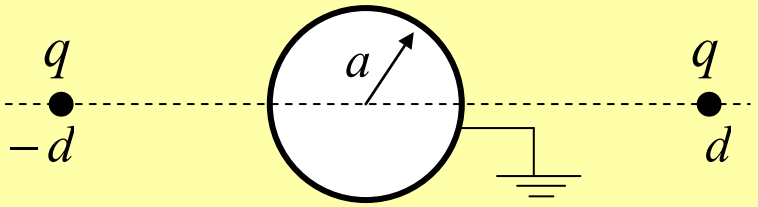


3. Un cascarón conductor esférico de radio interno a, y radio externo b tiene una carga neta nula y está aislado. Si a una distancia d ($d < a$) se coloca una carga q y a una distancia D ($D > b$) una carga Q.

Calcular la fuerza sobre q y sobre Q

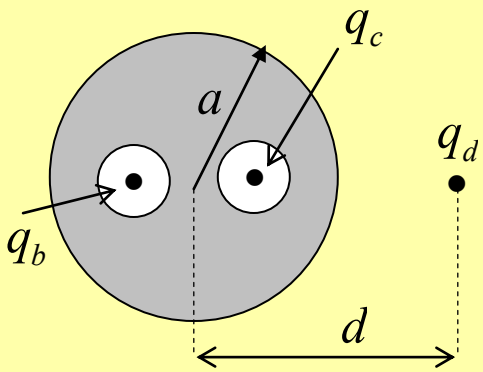


4. Dos cargas iguales q están separadas una distancia $2d$ ($a << d$). Calcular el radio a de una esfera conductora tal que ubicada en el medio y conectada a Tierra anula la repulsión entre las cargas puntuales.



5. Un conductor esférico tiene dos cavidades esféricas. La carga neta sobre el conductor es cero. Sin embargo, hay una carga puntual q_b en el centro de una de las cavidades y q_c en el centro de la otra. Hay además una carga puntual q_d a una distancia d del centro de la esfera y fuera de ella. ¿Qué fuerza actúa sobre cada uno de los siguientes objetos:

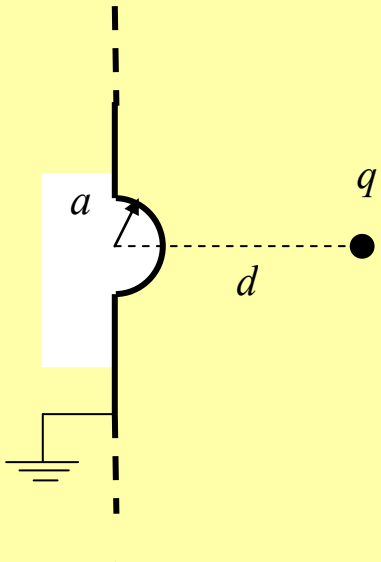
esfera, q_b , q_c , q_d ? Llámese a al radio externo del conductor esférico.



6. Una lámina conductora infinita sobre la cual se ha hecho una protuberancia hemisférica está conectada a Tierra. A una distancia d del centro del hemisferio se coloca una carga puntual q. Determinar:

a) La fuerza sobre la carga q.

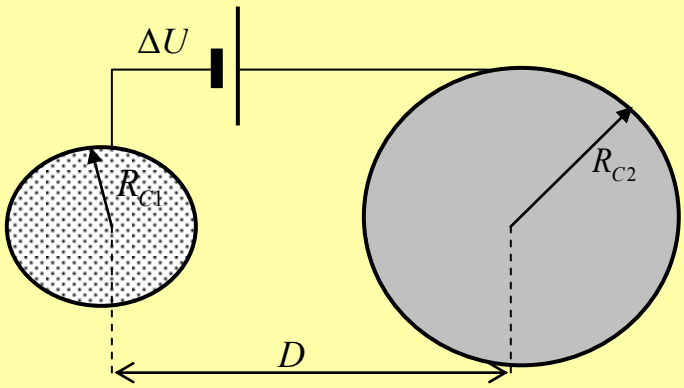
b) La densidad superficial de carga sobre el hemisferio.



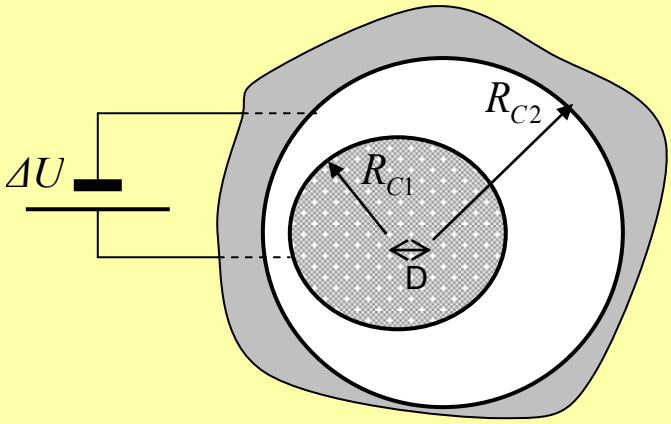
7. Hallar el campo eléctrico en puntos del eje de un anillo de radio d cargado uniformemente con densidad lineal λ, cuando éste está colocado concéntricamente a una esfera conductora neutra de radio a ($a < d$). Dé también la aproximación multipolar para el potencial del sistema en puntos $r >> d$, fuera del eje perpendicular que pasa por el centro del anillo.

8. Una esfera conductora de radio a tiene cerca de ella dos cargas puntuales Q y – Q situadas sobre un diámetro extendido a una distancia D de su centro a la derecha e izquierda, respectivamente, ($D > a$). Encontrar la magnitud y la posición de las cargas imagen dentro de la esfera. Aproxime luego D y Q a infinito de tal manera que Q/D^2 permanezca constante. Encontrar el campo eléctrico en la vecindad de la esfera.

9. Hallar los valores de las líneas de carga imagen λ y $-\lambda$ que reemplacen al sistema mostrado en la figura, en términos de ΔU . Sugerencia: Ver ejemplo 5**.**



10. Hallar los valores de las líneas de carga imagen λ y $-\lambda$ que reemplacen al sistema electrostático mostrado en la figura**.**



CAPITULO 5

ELECTROSTÁTICA EN MEDIOS DIELÉCTRICOS

5.1 INTRODUCCIÓN

Los materiales dieléctricos o aislantes no tienen electrones libres. Esto implica que en condiciones electrostáticas sí puede haber campo eléctrico en puntos dentro del material y por lo tanto carga neta encerrada en cualquier elemento de volumen.

La existencia de electrones libres en los conductores y su inexistencia en los aislantes se explica en Física del Estado Sólido usando la Teoría de Bandas.

Si en el material aislante, debido a cargas en su exterior, se tiene un campo eléctrico; entonces en cada una de sus moléculas el centro de cargas positivas y el centro de cargas negativas se separan entre sí, convirtiéndose cada molécula en un pequeño dipolo eléctrico. Cuando esto sucede se dice que el material se ha polarizado.

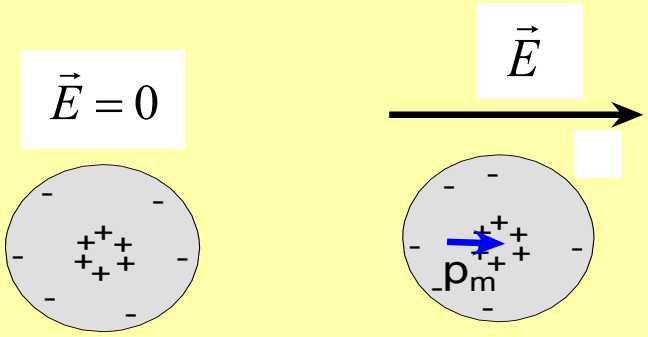


Fig. 1 Una molécula es simétrica en ausencia de campo.
Un campo eléctrico no nulo polariza la molécula

El momento dipolar, $\vec{p}_m$, de una molécula es:

$$\vec{p}_m = \iiint_{V_m} \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')\, dV' \qquad (1a)$$

donde V_m es el volumen de la molécula.

El momento dipolar de cualquier porción de dieléctrico de volumen ΔV es:

$$\Delta \vec{p} = \iiint_{\Delta V} \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \, dV' \tag{1b}$$

ó

$$\Delta \vec{p} = \sum_{m} \vec{p}_m \tag{1c}$$

donde la sumatoria se hace sobre todas las moléculas contenidas en el volumen ΔV .

Definición: Se llama **polarización**, $\vec{P}$, de un material polarizado a la densidad volumétrica de momento dipolar, es decir:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \tag{2a}$$

ó

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \tag{2b}$$

Nos interesa la polarización como una magnitud física macroscópica. Así que ΔV tiende a cero significa: elementos de volumen muy pequeños pero que todavía contienen algunas moléculas. Si el material es cristalino conviene pensar que el ΔV más pequeño es el volumen de una celda unitaria y si el material no es cristalino el ΔV más pequeño debe ser lo suficientemente grande para ser representativo del material.

Hay materiales en los cuales las moléculas tienen un momento dipolar, aun en ausencia de campo externo; estos se llaman **dieléctricos polares**. Generalmente sus moléculas, en ausencia de campo externo, están orientadas al azar y la cantidad macroscópica polarización resulta nula. La presencia de campo eléctrico externo orienta los momentos dipolares intrínsecos de las moléculas y produce una polarización neta.

Existen también materiales llamados **Ferroeléctricos ó Electretos**, en los cuales se puede observar una polarización aun en ausencia del campo externo.
En las dos próximas secciones de este capítulo calcularemos el campo eléctrico del material polarizado sin preocuparnos por el origen de la polarización.

5.2 CAMPO EN EL EXTERIOR DE UN MATERIAL POLARIZADO

Cada elemento de volumen $\Delta V'$ alrededor de un punto $\vec{r}'$ tiene un momento dipolar:

$$\Delta \vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')\,\Delta V'$$

el cual produce en un punto $\vec{r}$ (muy alejado de $\vec{r}'$) el potencial eléctrico:

$$\Delta U(\vec{r}') = \frac{\vec{P}(\vec{r}')\bullet(\vec{r}-\vec{r}')\,\Delta V'}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

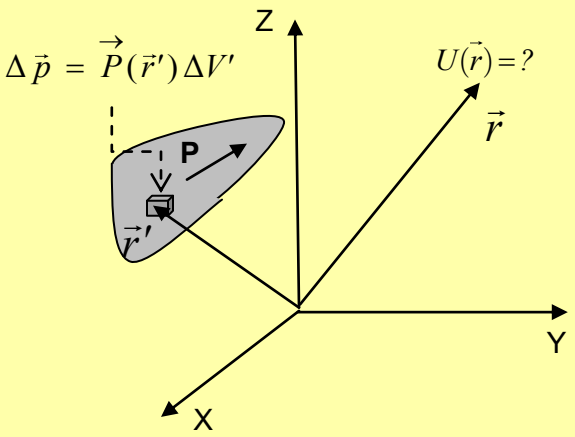


Fig. 2

El potencial electrostático en un punto $\vec{r}$, exterior al material, debido a un trozo finito de dieléctrico polarizado es, según el principio de superposición:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_d}\frac{\vec{P}\bullet(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV' \qquad (3)$$

donde V_d es el volumen del material dieléctrico.

La ecuación (3) da correctamente el potencial en puntos exteriores a un material dieléctrico cuando se conoce $\vec{P}$ en todos los puntos de su interior; sin embargo, para una mejor interpretación es conveniente modificarla usando las siguientes identidades vectoriales:

$$\vec{P}\bullet\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \vec{P}\bullet\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (4a)$$

$$\mathrm{div}'\,f\vec{F} = f\,\mathrm{div}'\vec{F} + \vec{F}\bullet\vec{\nabla}'f \qquad (4b)$$

donde las primas significan que se deriva respecto a x', y', z'; es decir, dentro del dieléctrico.

Haciendo en (4b) $f = |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$ y $\vec{F} = \vec{P}$, tenemos:

$$\vec{P} \bullet \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \text{div}' \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \text{div}' \vec{P} \qquad (4c)$$

Reemplazando (4c) en (4a) y ésta en (3) se tendrá, para el potencial electrostático del material polarizado:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left\{ \iiint_{V_d} \text{div}' \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' + \iiint_{V_d} \frac{-\text{div}' \vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \right\}$$

Por el teorema de la divergencia, el primer sumando se puede transformar en una integral de superficie y el potencial electrostático se escribirá entonces:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left\{ \oiint_{S_d} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n}\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \iiint_{V_d} \frac{-\text{div}' \vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \right\} \qquad (5)$$

que se puede interpretar como la superposición del potencial electrostático debido a una distribución superficial de carga:

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n}, \qquad (6a)$$

donde $\hat{n}$ sale del dieléctrico; y a una distribución volumétrica de carga:

$$\rho_P = -\text{div}\, \vec{P}\ . \qquad (6b)$$

σ_P y ρ_P se llaman respectivamente densidades superficial y volumétrica de carga de polarización ó densidades de carga ligada.

El potencial electrostático debido a un trozo de dieléctrico polarizado, en puntos externos, está entonces dado por la siguiente expresión:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left\{ \iiint_{V_d} \frac{\rho_P\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \iint_{S_d} \frac{\sigma_P\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\} \qquad (7)$$

y por analogía a la relación entre las ecuaciones (9) y (13) del capítulo 2 podemos establecer que el campo eléctrico debido a la polarización de un material, pero sólo en puntos externos está dado por :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{ \iiint_{V_d} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \iint_{S_d} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da' \right\} \tag{8}$$

Comentario: Que el potencial electrostático de un dieléctrico polarizado pueda ser expresado en función de la polarización (ec. 3) y de otro lado en función de las cargas de polarización (ec. 7) puede explicarse diciendo que es factible dividir al dieléctrico en elementos infinitesimales de volumen de dos maneras, como se muestra en la fig. (3).

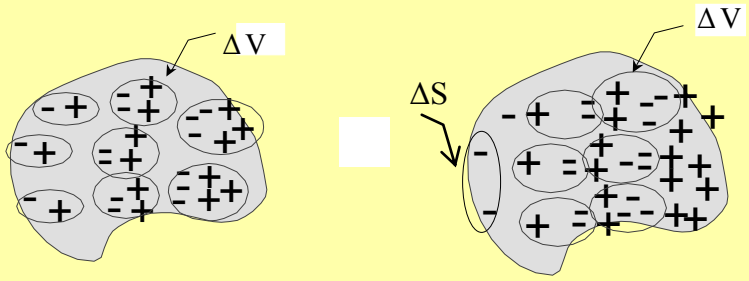


Fig. 3 El dieléctrico puede ser dividido en elementos diferenciales de volumen en dos formas. En (a) cada ΔV encierra un momento dipolar y en (b) cada ΔV encierra carga de polarización

Puesto que al polarizarse, por ejemplo, debido a un campo eléctrico externo, el dieléctrico no adquiere carga neta debemos tener:

CARGA NETA DE POLARIZACION = 0

ó

$$\iiint_{V_d} \rho_P\,dV' + \iint_{S_d} \sigma_P\,da' = 0 \tag{9}$$

Esto puede verificarse matemáticamente usando las definiciones de ρ_P, σ_P y el teorema de la divergencia.

Ejemplo 1 Una barra de material ferroeléctrico en forma de un cilindro circular recto de longitud L y radio R está polarizada en la dirección de su longitud. Si la polarización es uniforme y de magnitud P, calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje de la barra y fuera de ella.

Solución

Tomaremos como origen de coordenadas el centro del cilindro y llamaremos eje Z al eje del cilindro.

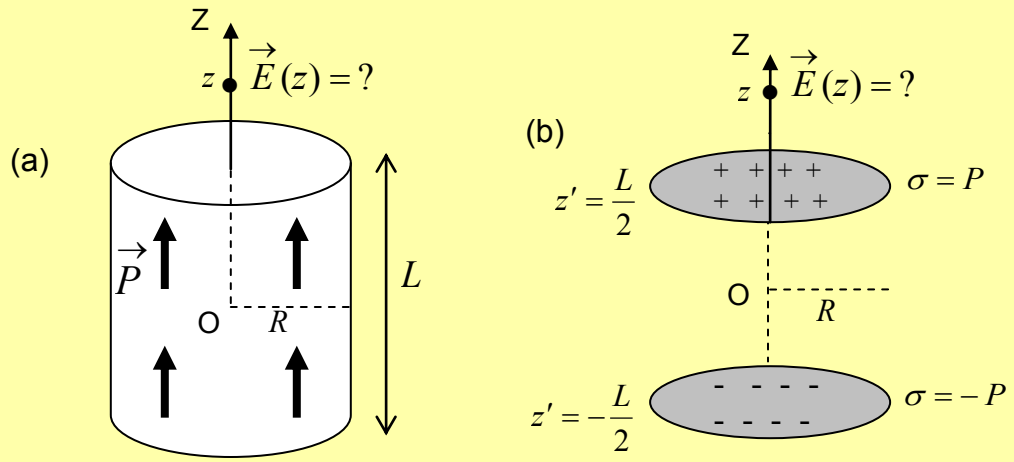


Fig. 4 Hallar el campo eléctrico en exterior de cilindro uniformemente polarizado: (a) Problema real , b) Problema equivalente

Dicho esto podemos decir que la polarización del material del cilindro es:

$$\vec{P} = P\hat{k}$$

y las densidades de carga de polarización son:

$$\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$$

$$\sigma_P = P \quad , \quad \text{en tapa} \quad z = \frac{L}{2}$$

$$\sigma_P = 0 \quad , \quad \text{en la superficie lateral.}$$

$$\sigma_P = -P \quad , \quad \text{en tapa} \quad z = -\frac{L}{2}$$

El campo del cilindro polarizado es igual al campo de dos discos cargados. Sabemos, por el ejemplo (1) del capitulo II, que el campo eléctrico en puntos del eje debido a un disco uniformemente cargado es:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left\{\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right\}\hat{k}$$

donde z es la coordenada Z tomando como origen el centro del disco cargado.

El campo debido al disco situado en $z = \frac{L}{2}$, en puntos del eje, encima de la varilla es:

$$\vec{E}_1(z) = \frac{P}{2\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{\left(z-\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}\right\}\hat{k} \quad ; \quad z > \frac{L}{2}$$

y el campo debido al disco situado en $z = -\frac{L}{2}$, en puntos del eje, encima de la varilla es:

$$\vec{E}_2(z) = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}\right\}\hat{k} \quad ; \quad z > \frac{L}{2}$$

El campo debido a toda la varilla es entonces:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

es decir:

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}\right\} \quad ; \quad z > \frac{L}{2}$$

Ejemplo 2 En un trozo de material dieléctrico se hace una cavidad esférica de radio a y se establece luego una polarización uniforme. Hallar el campo eléctrico en el centro de la cavidad debido a la densidad superficial de carga de polarización que hay en la superficie $r = a$.

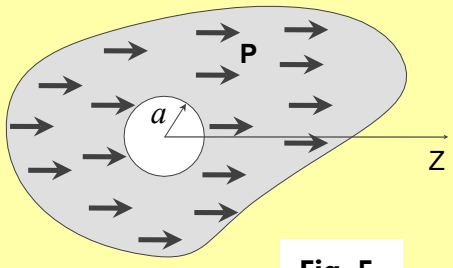


Fig. 5

Solución

Obsérvese que se pide el campo en el centro de la cavidad debido solamente a una parte de la carga de polarización, la que está en la superficie $r = a$.

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet (-\hat{e}_r)$$

$$\sigma_P = -P\,\mathrm{Cos}\theta$$

(Nótese que estamos definiendo como eje Z a la dirección de la polarización ($\vec{P}$)

Usando la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint \frac{\sigma_P\,(\vec{r}-\vec{r}')\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

tendremos en este caso particular:

$$\vec{E}(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(-P\,\mathrm{Cos}\theta)\,(-a\,\mathrm{Sen}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\ldots,-a\,\mathrm{Cos}\theta)\;a^2\,\mathrm{Sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi}{a^3}$$

y evaluando las integrales tenemos:

$$\boxed{\vec{E}(0,0,0) = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o}}$$

5.3 CAMPO ELÉCTRICO DESPOLARIZANTE

Al hablar del campo eléctrico dentro de un material dieléctrico debemos notar la diferencia entre el campo eléctrico microscópico y el campo macroscópico.

El campo eléctrico microscópico, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, es una cantidad muy variable en magnitud y dirección, de un punto a otro del dieléctrico. Por ejemplo, en la superficie de un núcleo atómico el campo es muy intenso; pero en el centro entre dos núcleos el campo es nulo. Inclusive en dos puntos diametralmente opuestos de un mismo núcleo el campo microscópico tiene direcciones opuestas.

El campo eléctrico macroscópico, $\vec{E}(\vec{r})$, puede definirse como el promedio del campo microscópico sobre un elemento de volumen ΔV macroscópico, es decir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iiint_{\Delta V} \vec{\varepsilon}(\vec{r})\, dV}{\Delta V} \qquad (10)$$

donde ΔV tiende a cero, pero encierra algunas moléculas.

Nos interesa, en este curso, el campo eléctrico macroscópico o maxwelliano, $\vec{E}$. Este es el campo que nos da, por ejemplo, la diferencia de potencial entre dos puntos dentro de un material dieléctrico.

El campo $\vec{E}(\vec{r})$ siempre puede escribirse como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{E}_d(\vec{r}) \text{ ,} \qquad (11)$$

donde $\vec{E}_{ext}$ es el campo eléctrico debido a cargas extrañas (significa cargas externas, o internas pero extrañas al dieléctrico) y $\vec{E}_d$ es el campo debido a la polarización del mismo material dieléctrico.

Al campo eléctrico, $\vec{E}_d$, en un punto interno del dieléctrico debido a la polarización del mismo material se le llama **campo eléctrico despolarizante**.

Demostraremos que para calcular $\vec{E}_d$, se puede usar la misma expresión que se ha deducido para calcular el campo debido a la polarización en puntos externos del material, es decir:

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint_{V_d} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dV' + \iint_{S_d} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, da'\right\} \qquad (8)$$

El empleo de esta expresión no es obvio porque un punto interno está rodeado de dipolos y la ec.(8) ha sido deducida a partir de:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\bullet(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3},$$

que es válida sólo en puntos alejados del dipolo.

Para demostrar que la ec. (8) es válida en puntos internos del dieléctrico, sigamos el siguiente razonamiento:

Tracemos imaginariamente, alrededor del punto $\vec{r}$, una superficie esférica de radio R, pequeño desde el punto de vista macroscópico (ver figura 6). Podemos escribir entonces:

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = \vec{E}'_d(\vec{r}) + \vec{E}''_d(\vec{r})$$

donde: $\vec{E}'_d$ es debido a los dipolos dentro de la esfera de radio R, $\vec{E}''_d$ es debido a los dipolos fuera de la esfera de radio R.

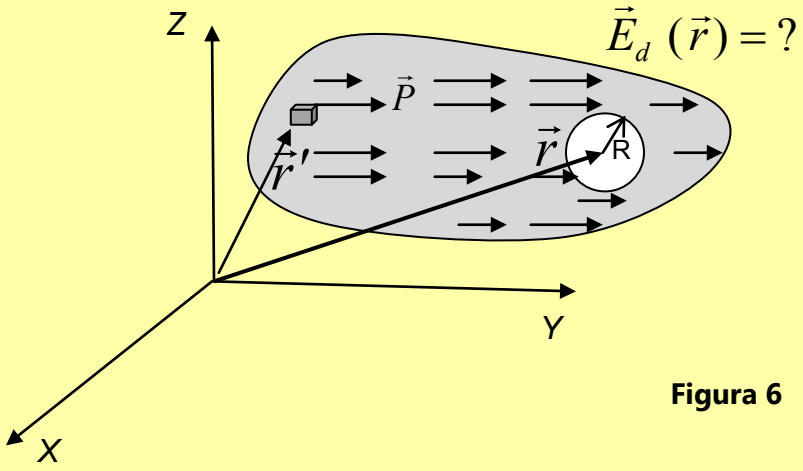


Figura 6

Si R es suficientemente pequeño podemos decir que el campo eléctrico en $\vec{r}$ debido a las cargas dentro de la esfera es igual al campo promedio sobre toda la esfera debido su propia carga (ver ec. (34) del capitulo 2), es decir:

$$\vec{E}'_d(\vec{r}) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

donde $\vec{p}$ es el momento dipolar de la esfera. Puesto que la esfera es muy pequeña podemos decir que $\vec{p}$ es igual al valor de la polarización en $\vec{r}$ por el volumen de la esfera. Por lo tanto:

$$\vec{E'}_d(\vec{r}) = \frac{-\vec{P}}{3\,\varepsilon_0} \qquad (12a)$$

Por otro lado, para los dipolos fuera de la esfera de radio R, $\vec{r}$ es un punto externo y podemos escribir, de acuerdo al resultado de sección anterior:

$$\vec{E''_d}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint_{V_d - V_R} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV' + \iint_{S_d + S_R} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da'\right\}$$

donde S_R es la superficie de la esfera de radio R , V_R es su volumen; V_d es el volumen del material dieléctrico y S_d su superficie exterior (ver figura 6).
Por el ejemplo (2) ya sabemos que:

$$\iint_{S_R} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0}$$

luego:

$$\vec{E''_d}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint_{V_d - V_R} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV' + \iint_{S_d} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da'\right\} + \frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0} \qquad (12b)$$

Las ecuaciones (12a) y (12b) nos dicen entonces que un punto $\vec{r}$ dentro del dieléctrico el campo debido a la polarización del mismo material es:

$$\vec{E_d}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint_{V_d - V_R} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV' + \iint_{S_d} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da'\right\} \qquad (13)$$

La diferencia entre ésta y la ecuación (8) es el término:

$$\iiint_{V_R} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV'$$

el cual es nulo. Para comprender por qué este término es nulo tengamos en cuenta que la esfera es pequeña y si existe en ella densidad de carga volumétrica, ésta puede considerarse uniforme.

Hemos demostrado así que para calcular el campo eléctrico debido a la polarización de un material, tanto en puntos internos como externos, podemos usar la ec. (8).

Ejemplo 3 Calcular el campo eléctrico en puntos del eje, dentro de una barra cilíndrica de radio R y longitud L uniformemente polarizada con polarización P a lo largo de su longitud.

Solución

Las cargas de polarización son las mismas que en el ejemplo (1). El campo en cualquier punto del eje, dentro del material debido a su propia polarización se calcula como si tratara de hallar el campo eléctrico en el vacío debido a los discos con carga de polarización en $z = \frac{L}{2}$ y $z = -\frac{L}{2}$. (Estamos tomando origen de coordenadas en el centro del cilindro)

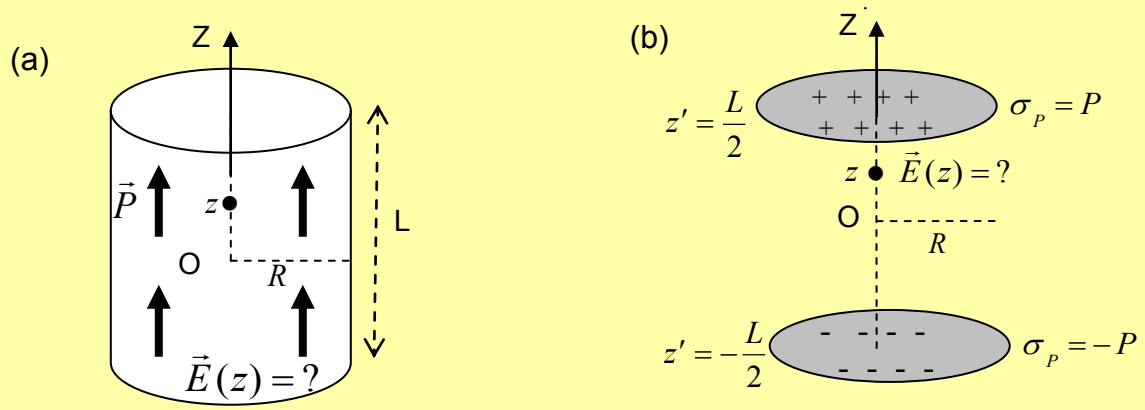


Fig. 7 Hallar el campo despolarizante en el interior de un cilindro polarizado: (a) Problema real , b) Problema equivalente

Debido al disco en $z = \frac{L}{2}$, tenemos:

$$\vec{E}_1(z) = \frac{P}{2\varepsilon_0}\left\{-1+\frac{\left(\frac{L}{2}-z\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}}\right\}\hat{k} \quad ; \quad 0 < z < \frac{L}{2}$$

y debido al disco en $z=-\frac{L}{2}$:

$$\vec{E}_2(z) = \frac{-P}{2\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}\right\}\hat{k} \quad ; \quad 0 < z < \frac{L}{2}$$

luego:

$$\vec{E}_d(z) = \frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}\left\{-2 + \frac{\left(\frac{L}{2}-z\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}} + \frac{\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}\right\} \quad ; \quad 0 < z < \frac{L}{2}$$

Nótese que en cualquier punto del eje *Z* el campo $\vec{E}_d$ es de sentido contrario a la polarización. Esto sucede en este ejemplo no por casualidad. Siempre, el campo debido a la polarización en puntos dentro del material polarizado es opuesto a la polarización. De allí el nombre **campo eléctrico despolarizante**.

Nótese también que los cálculos hechos en los ejemplos del (1) al (3) pueden corresponder a situaciones físicas diferentes: Puede tratarse del campo debido a un material ferroeléctrico polarizado o puede ser una parte del campo eléctrico macroscópico debido a un material dieléctrico l.i.h en un problema que involucra también campos debidos a cargas extrañas.

Ejemplo 4. Hallar el potencial electrostático $U(\vec{r})$ y el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ debido a una esfera de radio R uniformemente polarizada con polarización $\vec{P} = P\,\hat{e}_z$.

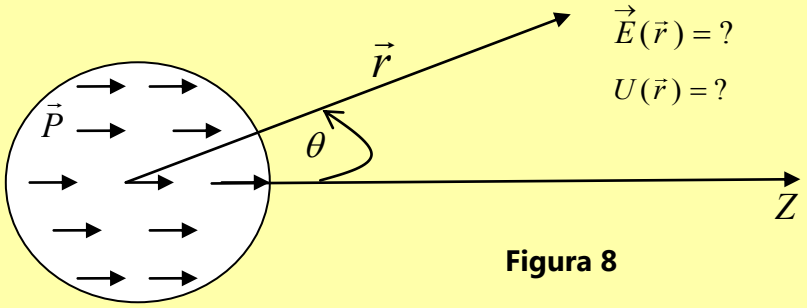


Figura 8

Solución: Puesto que la polarización es uniforme, es sencillo hallar el potencial $U(\vec{r})$ por integración directa de la ecuación (3)

$$U(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$$

Relacionando la integral

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$$

con el campo eléctrico de una esfera de radio R uniformemente cargada con $\rho = 1$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{3\,\varepsilon_0}, \quad \text{si} \quad r < R \qquad \text{y} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{R^3}{3\,\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r, \quad \text{si} \quad r > R$$

Luego:

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{P\,r\,\cos\theta}{3\,\varepsilon_0}, & \text{si} \quad r < R \\ \dfrac{PR^3\cos\theta}{3\,\varepsilon_0\,r^2}, & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

El campo $\vec{E}(\vec{r})$ se puede hallar tomando el gradiente de $U(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0}, & \text{si} \quad r < R \\ \dfrac{PR^3}{3\,\varepsilon_0\,r^3}(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \operatorname{Sen}\theta\,\hat{e}_\theta), & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

5.4 SUSCEPTIBILIDAD, CAMPO LOCAL Y POLARIZABILIDAD

En el interior de todo material dieléctrico polarizado coexisten dos campos vectoriales de interés para la teoría electromagnética, la polarización y el campo eléctrico macroscópico o maxwelliano. Es decir, en cualquier punto $\vec{r}$ dentro de un material aislante están definidos un vector $\vec{P}$ y un vector $\vec{E}$. Ambos se podrían medir independientemente uno del otro. En esta sección discutimos la relación entre ambas cantidades.

El campo eléctrico $\vec{E}$ es producido parcialmente por $\vec{P}$, como se ha visto en la sección anterior, y la polarización es debida a una parte de $\vec{E}$. Se tiene un problema parecido al del huevo y la gallina; así que no se puede establecer una relación causa-efecto entre ambas cantidades.

Lo que sí se puede hacer es establecer, para cada material, una relación de coexistencia entre ambas cantidades. Esta relación se establece definiendo la **susceptibilidad eléctrica de un material** $\vec{\vec{\chi}}$:

$$\vec{P} = \vec{\vec{\chi}}\,\varepsilon_0 \vec{E} \tag{14}$$

La susceptibilidad eléctrica caracteriza a un material y en general es una función tensorial que depende del módulo del campo eléctrico, de la dirección del campo eléctrico y de la posición dentro del material.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \varepsilon_0 \vec{E} \tag{14a}$$

Si $\vec{\vec{\chi}}$ no depende de la dirección del campo eléctrico, de modo que $\vec{P}$ y $\vec{E}$ son siempre paralelos, entonces, la susceptibilidad es un escalar y se dice que el material es isotrópico.

Si $\vec{\vec{\chi}}$ no depende del módulo del campo eléctrico, se dice que el material es lineal.

Si $\vec{\chi}$ no depende de la posición dentro del material, éste es homogéneo.

La gran mayoría de materiales útiles en ingeniería eléctrica y electrónica son lineales, isotrópicos y homogéneos, de modo que la susceptibilidad eléctrica se reduce a una constante escalar.

$$\vec{P} = \chi \, \varepsilon_0 \vec{E} \tag{14b}$$

Conviene dar un sustento más fundamental a esta relación de coexistencia a partir de una relación causa-efecto. Para eso vamos a introducir los conceptos de campo local y polarizabilidad eléctrica.

Definición: Llamaremos **Campo Local**, $\vec{E}_{loc}$, al campo eléctrico experimentado por una molécula (o por un átomo).

Puesto que el campo debido a la carga de una molécula no puede actuar sobre sí misma, la diferencia entre $\vec{E}_{loc}$ y $\vec{E}$ es el campo producido por la carga de la misma molécula, $\vec{E}_m$, es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_{loc} + \vec{E}_m \tag{15}$$

Para establecer más precisamente la diferencia entre $\vec{E}_{loc}$ y $\vec{E}$ calculemos el campo debido a una molécula, $\vec{E}_m$. Para simplificar este cálculo supongamos que la molécula tiene forma esférica y momento dipolar $\vec{p}_m$; entonces, de acuerdo con la discusión de la sección II.9 (ec.34 del capítulo 2) tenemos:

$$\vec{E}_m = \frac{-\vec{p}_m}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

donde R es el radio de la molécula.

Si N es el número de moléculas por unidad de volumen, tenemos: $\vec{p}_m = \dfrac{\vec{P}}{N}$

y por otro lado: $4\pi R^3 = 3V_m$, donde V_m es el volumen de una molécula; entonces:

$$\vec{E}_m = -\frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0 N\,V_m}$$

y asumiendo que el volumen del material dieléctrico está totalmente lleno por sus moléculas $(N\,V_m = 1)$ se tiene entonces:

$$\vec{E}_m = -\frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0} \tag{16}$$

con lo cual la ec. (15) se puede escribir:

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0} \tag{17}$$

Esta relación es, en el mejor de los casos, sólo aproximada; una expresión más realista es la siguiente:

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{b\,\vec{P}}{\varepsilon_0}, \tag{17a}$$

donde *b* es una constante que depende del material.

Por otro lado, el campo local es la causa de la polarización de una molécula, así que podemos escribir la siguiente relación causa-efecto:

$$\vec{p}_m = \alpha\,\vec{E}_{loc} \tag{18}$$

donde α es la **polarizabilidad** del material. En general, la polarizabilidad puede ser un una función tensorial del campo eléctrico y de la posición, pero consideramos en este curso básicamente materiales l.i.h., de modo que α puede ser considerada un escalar constante para cada material.

Reemplazando la ec. (17a) en (18) tendremos:

$$\vec{p}_m = \alpha\left(\vec{E} + \frac{b\,\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)$$

y por lo tanto:

$$\vec{P} = N\,\vec{p}_m = N\,\alpha\left(\vec{E} + \frac{b\,\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)$$

de donde podemos despejar:

$$\vec{P} = \frac{N\,\alpha}{\left(1 - \frac{N\,\alpha\,b}{\varepsilon_0}\right)}\,\vec{E}$$

y así obenemos la relación de coexistencia ya mencionada:

$$\boxed{\vec{P} = \chi\,\varepsilon_0\,\vec{E}} \qquad (14b)$$

5.5 EL PROBLEMA GENERAL DE LA ELECTRSOTÁTICA

El problema general de la electrostática puede enunciarse así: Dada una distribución de carga extraña (libre) dentro y/o fuera de uno o varios trozos de material aislante, hallar el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en cualquier punto de cada uno de los medios.

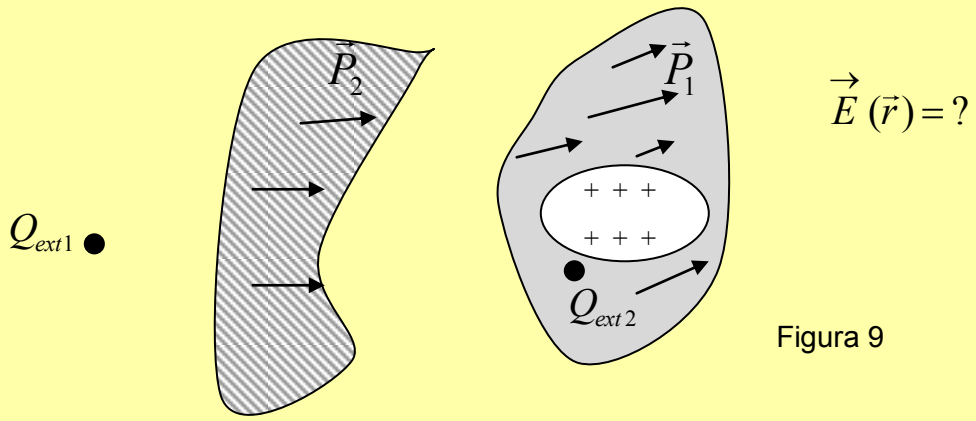


Figura 9

Hemos visto que el campo creado por las cargas de polarización (ec.8) tiene exactamente la misma forma que el campo creado por un sistema de cargas en el vacío (ec.9 de capitulo 2). Podemos concluir entonces que si conociéramos la distribución de cargas extrañas y de polarización, podríamos calcular el campo eléctrico en cualquier medio como si se tratara de un problema de electrostática en el vacío, es decir, por la expresión general:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint_V \frac{\rho_{ext}(\vec{r}-\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \iint_S \frac{\sigma_{ext}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da'\right\} +$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\iiint_{V_d} \frac{\rho_P(\vec{r}-\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \iint_{S_d} \frac{\sigma_P(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da'\right\} \qquad (19)$$

Sin embargo, no es muy práctico usar ésta expresión porque σ_P y ρ_P dependen de $\vec{P}$ y ésta a su vez depende de $\vec{E}$; es decir $\vec{E}$ está en el primer y en el segundo miembro.

Para resolver problemas electrostáticos, la teoría electromagnética desarrolla técnicas basadas en los siguientes fundamentos:

(1) Definir un campo auxiliar, el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$

(2) Establecer la relación de coexistencia entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en cada material.

(3) Establecer las reglas que satisfacen los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en las interfaces entre dos medios, éstas se llaman las condiciones de frontera para los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$.

Hay que enfatizar también que después de haber resuelto cada problema de electrostática usando las técnicas mencionadas y que desarrollaremos a continuación, la ecuación (19) sirve como una verificación de cualquier solución a un problema electrostático. Después de hallar el campo $\vec{E}$, se puede calcular $\vec{P}$, luego las distribuciones de carga, ρ_{ext}, ρ_P, σ_{ext}, σ_P, y siempre puede verificarse la veracidad de la ecuación (19).

5.6 VECTOR DEPLAZAMIENTO ELÉCTRICO Y LEY DE GAUSS

Los mismos métodos matemáticos que nos llevaron a establecer la ley de Gauss a partir de la ecuación (9) del capitulo 2 pueden ser usados ahora para obtener la ley de Gauss en dieléctricos a partir de la ec. (19). Primero, en forma diferencial

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho_{ext} + \rho_P}{\varepsilon_0} \tag{20a}$$

y luego en forma integral.

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{Q_{ext} + Q_P}{\varepsilon_0} \tag{20b}$$

Nótese que la ley de Gauss en dieléctricos y en el vacío es exactamente la misma. Sólo que en el caso de dieléctricos hay que incluir las cargas de polarización. Podemos modificar la presentación de las ec. (20a) usando la ecuación (6b):

$$\vec{\nabla} \bullet (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{ext} \tag{21}$$

Definición: Al campo vectorial:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{22}$$

se le llama **Desplazamiento Eléctrico**.

Es conveniente escribir la ley de Gauss en términos del campo desplazamiento eléctrico $\vec{D}$:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho_{ext} \tag{23a}$$

ó

$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{a} = Q_{ext} \tag{23b}$$

En materiales dieléctricos l.i.h., se verifica la ec. (14b) y por lo tanto la ec. (22) puede escribirse:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \tag{24}$$

Definición: A la constante:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi) \tag{25a}$$

se le llama **Permitividad Eléctrica**. Podemos escribir entonces:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{24a}$$

Definición: A la constante K tal que:

$$\varepsilon = K \varepsilon_0 \tag{25b}$$

se la llama **constante dieléctrica** o **permitividad eléctrica relativa** ε_r .

Nótese que las propiedades eléctricas del material pueden describirse en función de cualquiera de las tres constantes: ε , K , χ . Las relaciones entre ellas son las ecs. (25a) , (25b) y

$$\chi = K - 1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \tag{25c}$$

COMENTARIO 1: En la teoría electromagnética nadie se interesa por el rotacional del vector desplazamiento eléctrico, pero es obvio que por lo menos en problemas de electrostática que involucran sólo medios lineales, isotrópicos y homogéneos el rotacional del vector $\vec{D}$ es nulo. Por lo tanto las ecs. (23), de acuerdo con el teorema de Helmholtz, son equivalentes a:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iiint_V \frac{\rho_{ext}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \iint_S \frac{\sigma_{ext}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' \right\}$$

COMENTARIO 2. Cuando la carga extraña (o libre) es simétricamente distribuida se puede usar la ley de Gauss para evaluar $\vec{D}$ de la misma manera que se usó en las sección 2.6 para evaluar $\vec{E}$ en el vacío.

5.7 CARGA PUNTUAL EN UN MEDIO DIELÉCTRICO L.I.H

Supongamos que tenemos un medio dieléctrico l.i.h de extensión infinita y constante dieléctrica K. En él se ha sumergido una carga puntual Q y queremos hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ (Una aplicación particular de la ec.(19)).

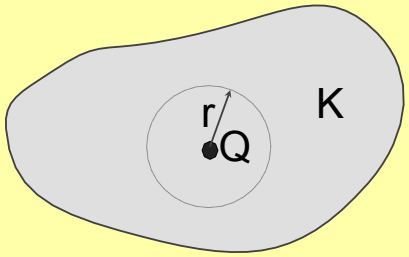


Fig. 10

Puesto que en un material l.i.h las tres cantidades $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$ se relacionan entre sí por una constante y por lo tanto son paralelos entre sí. Esperamos además que, tomando origen de coordenadas en la posición de la carga Q, la dirección común de $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$ sea radial

La ec. (23a) aplicada a una superficie esférica de radio r centrada en la carga Q da:

$$D(4\pi r^2) = Q$$

y por lo tanto:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{e}_r \qquad (26)$$

la cual, usando las ecs. (24a) y (25b) nos permite escribir para el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi K\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r \qquad (19a)$$

A su vez, las ecs. (14b), (25c), (19a) dan para la polarización:

$$\vec{P} = \frac{(K-1)Q}{4\pi K r^2}\hat{e}_r \qquad (27)$$

El hecho de que el campo eléctrico debido a una carga puntual disminuya por un factor K respecto al campo que produciría en el vacío puede explicarse de la siguiente manera: Supongamos que la carga Q no es puntual sino que está

distribuida en una esfera conductora de radio b. A partir de $\vec{P}$ (ec. 27) podemos obtener las cargas de polarización:

$$\rho_P = 0$$

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n} = \vec{P} \bullet (-\hat{e}_r) = \frac{(1-K)\,Q}{4\pi K\, b^2}$$

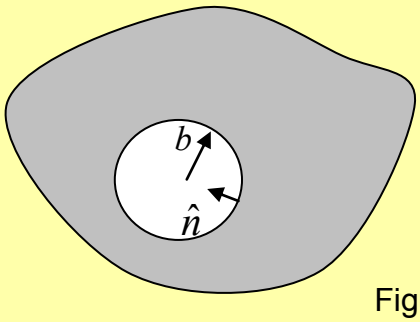


Figura 10a

y por lo tanto, en la superficie esférica de radio b existe carga de polarización:

$$Q_P = \frac{(1-K)\,Q}{K} \qquad (28)$$

que junto con la carga "extraña" Q hacen que en la esfera de radio b haya una carga total:

$$Q_{total} = \frac{Q}{K} \qquad (29)$$

Los resultados (19a) y (29) se interpretan así: Una carga Q en un medio dieléctrico l.i.h. de constante K produce un campo eléctrico igual al que produciría en el vacío una carga $\frac{Q}{K}$.

COMENTARIO I: Puesto que las cargas de las ecs. (28) y (29) son independientes del valor b, estas expresiones se mantienen aun en el caso límite en que b tiende a cero, es decir, cuando la carga es puntual.

COMENTARIO II: Si todos los problemas con dieléctricos involucraran un solo medio eléctrico l.i.h. podríamos generalizar la ec. (19a) para cualquier distribución arbitraria de carga libre o extraña:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi K \varepsilon_0} \int \frac{dq'\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

5.8 ALGUNAS APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS EN DIELÉCTRICOS

Veamos algunos casos donde se puede usar la Ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en medios dieléctricos l.i.h. debido a distribuciones de carga simétricas.

Ejemplo 5 En un medio dieléctrico infinito de constante K se sumerge un hilo muy delgado y de longitud infinita, con densidad lineal de carga λ. Hállense los campos $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$

Solución

Puesto que el medio es infinito podemos proceder de acuerdo al comentario 2 de la sección anterior, es decir, podemos hallar el campo $\vec{D}$ en el dieléctrico de manera análoga a cómo en la sección 2.6 hallamos el campo eléctrico en el vacío.

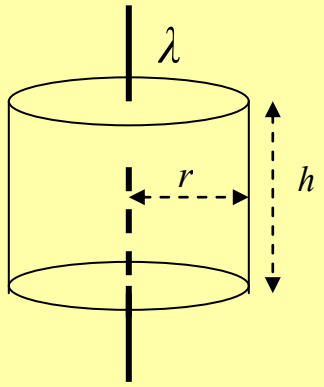


Fig. 11 Hilo cargado en medio dieléctrico

Tomando la dirección del hilo cargado como eje *Z*, y aplicando la Ley de Gauss al cilindro de radio r y altura h, tenemos:

$$D(2\pi r h) = \lambda h$$

luego:

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{e}_\rho \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi K \varepsilon_0 r}\hat{e}_\rho \quad ; \quad \vec{P} = \frac{(K-1)\lambda}{2\pi K r}\hat{e}_\rho$$

Nótese que r es la distancia del punto donde se evalúa el campo hasta la línea de carga.

Ejemplo 6 En un medio dieléctrico infinito de constante K se ha introducido carga libre de tal manera que respecto a un punto de referencia O, en coordenadas esféricas se tiene:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad ; \quad r < R$$

Hallar los campos $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$ y la densidad volumétrica de carga de polarización:

a) en puntos $r > R$, b) en puntos $r < R$.

Solución

En este caso también se puede calcular $\vec{D}$ de la misma manera que se calcularía $\vec{E}$ en el vacío.

a) Aplicando la ley de Gauss a una superficie esférica de radio $r > R$ tenemos:

$$D\left(4\pi r^2\right) = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 4\pi r^2 dr$$

y por lo tanto:

$$\vec{D} = \frac{2\,\rho_0\, R^3}{15\, r^2} \hat{e}_r \quad ; \quad \vec{E} = \frac{2\,\rho_0 R^3}{15 K\, \varepsilon_0 r^2} \hat{e}_r \quad ; \quad \vec{P} = \frac{2\,(K-1)\,\rho_0\, R^3}{15\, K\, r^2} \hat{e}_r$$

b) Aplicando la ley de Gauss a una superficie esférica de radio $r < R$:

$$D(4\pi r^2) = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 4\pi r^2 dr$$

Se tiene entonces para puntos tales que $r < b$ lo siguiente:

$$\vec{D} = \rho_0 \left\{ \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5\,R^2} \right\} \hat{e}_r \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\rho_0}{K\,\varepsilon_0} \left\{ \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5\,R^2} \right\} \hat{e}_r$$

$$\vec{P} = \frac{(K-1)\,\rho_0}{K} \left\{ \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right\} \hat{e}_r \quad ; \quad \rho_P = \frac{(1-K)\rho_0}{K} \left\{ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right\}$$

El estudiante puede calcular el potencial en cualquier punto dentro ó fuera de la esfera de radio b integrando el campo eléctrico desde infinito hasta $\vec{r}$.

Ejemplo 7

Un conductor de forma arbitraria está sumergido en un dieléctrico l.i.h. de constante K. Si la densidad superficial de carga en el conductor está descrita por $\sigma(x,y,z)$, hallar el campo eléctrico en puntos frontera entre el conductor y el dieléctrico.

Solución

Aplicando la Ley de Gauss a la pequeña superficie cilíndrica cerrada ΔS, cuyas tapas tienen área Δa, tenemos:

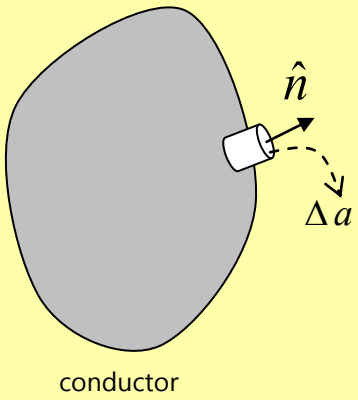


Figura 12

$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{a} = \sigma(\Delta a)$$

$$\vec{D} \bullet (\Delta a)\,\hat{n} = \sigma \Delta a$$

$$\boxed{\sigma = \vec{D} \bullet \hat{n}} \qquad (30)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{K \varepsilon_0}\,\hat{n} \qquad (31)$$

El campo eléctrico dentro del conductor es nulo y en el medio que lo rodea está dado por la ec. (31). Hay que recordar que ésta es una relación de coexistencia. El campo no es creado sólo por $\sigma \Delta a$ si no por todas las cargas del universo.

5.9 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LOS CAMPOS E Y D

Para resolver problemas de electrostática que involucran a dos o más medios es conveniente dejar establecidas algunas reglas que satisfacen los campos $\vec{E}, \vec{D}$ y U al pasar una frontera de uno a otro medio. Estas reglas se refieren a la componente normal de $\vec{D}$ y a la componente tangencial del campo eléctrico.

COMPONENTE NORMAL DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO

Aplicando la Ley de Gauss al cilindro pequeño de la figura vemos que:

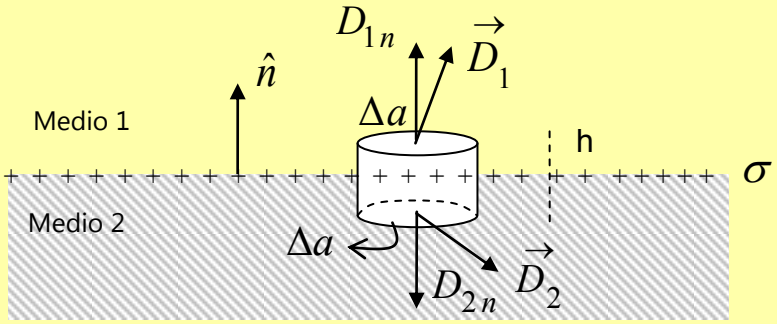


Figura 13a

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \bullet \hat{n}\, \Delta a \;=\; \sigma\, \Delta a \;+\; \frac{h}{2}\, \Delta a\, (\rho_1 + \rho_2)$$

donde $\sigma\,, \rho_1\,, \rho_2$ son densidades de carga libre (o extraña al medio). En el límite cuando h tiende a cero tenemos:

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \sigma} \qquad (32)$$

En problemas electrostáticos concretos, sino se menciona explícitamente que se ha colocado carga libre entre dos dieléctricos, se tiene $\sigma = 0$ y por lo tanto:

$$D_{1n} \;=\; D_{2n} \qquad (32a)$$

ó

$$K_1\, E_{1n} \;=\; K_2\, E_{2n} \qquad (32b)$$

El resultado (32) también es válido cuando uno de los medios, por ejemplo del medio 2, es conductor. En ese caso $D_{2n} = 0$ y:

$$D_{1n} = \sigma \qquad (32c)$$

COMPONENTE TANGENCIAL DEL CAMPO ELÉCTRICO

Estudiemos ahora la componente tangencial de $\vec{E}$ en la frontera entre dos medios: Teniendo en cuenta que $\vec{E}$ es un campo vectorial conservativo podemos aplicar la ecuación:

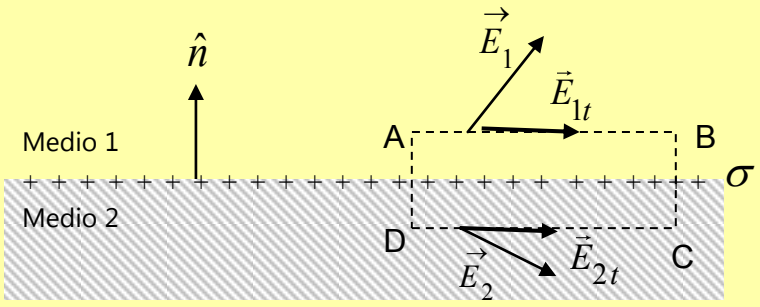


Figura 13b

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

a la trayectoria ABCDA de la fig. (13b) y se tiene:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Puesto que E_n no puede ser infinito, en el límite cuando h tiende a cero tenemos:

$$\int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \qquad (33)$$

Por lo tanto:

$$\int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Pero en el límite $h \to 0$, $\mathrm{A} \to \mathrm{D}$ y $\mathrm{B} \to \mathrm{C}$; de esto se obtiene:

$$\int_A^B \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Puesto que A y B son dos puntos cualesquiera cerca de la frontera, la anterior ecuación implica:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \qquad (34)$$

es decir, la componente tangencial de $\vec{E}$ es siempre continua al pasar de un medio a otro.

CONTINUIDAD DEL POTENCIAL

La ec. (33) puede tomarse como una condición de frontera para el potencial. A saber:

$$U_1 = U_2 \tag{35}$$

El potencial es continuo al cruzar una interface haya o no haya una distribución superficial de carga.

5.10 CARGA EN LA INERFACE DE DOS MEDIOS DIELÉCTRICOS

Consideremos el problema de hallar el campo eléctrico debido una carga puntual en la interface de dos medios dieléctricos semiinfinitos cuya frontera es un plano infinito.

Como en la sección 5.7 podemos conside

rar la carga en una superficie conductora de radio a que puede ser tan pequeño como queramos.

Observemos que la ley de Gauss se cumple siempre, pero en este caso no se puede usar para evaluar $\vec{D}$ porque la carga en el conductor, como veremos, no está uniformemente distribuida.

Lo que sí se puede asegurar es que para que se cumpla $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ el campo debe ser radial y la distribución de carga total (Q + Q_P) sí se distribuye uniformemente.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{A}{r^2}\hat{e}_r$$

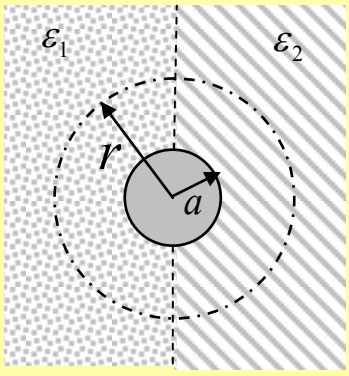


Figura 14

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \frac{A}{r^2}\hat{e}_r$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \frac{A}{r^2}\hat{e}_r$$

Para obtener la constante A usamos:

$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{a} = Q$$

$$A = \frac{Q}{2\,\pi\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{2\,\pi\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,r^2}\,\hat{e}_r$$

Nótese que en la interface entre los planos se satisfacen las condiciones de frontera $D_{1n} = D_{2n} = 0$ así como $E_{1t} = E_{2t} = \frac{Q}{2\,\pi\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,r^2}$.

Se puede usar la condición de frontera (32c) para determinar la forma como se distribuye la carga Q en la superficie de la esfera conductora de radio a.

$$\sigma_1\big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_1\,Q}{2\pi\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,a^2} \qquad \sigma_2\big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_2\,Q}{2\pi\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,a^2}$$

Así mismo se puede encontrar la carga de polarización en la frontera entre conductor y cada medio dieléctrico.

$$\sigma_{P1}\big|_{r=a} = -\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\,Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,a^2} \qquad \sigma_{P2}\big|_{r=a} = -\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q}{2\pi\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,a^2}$$

observándose que $\sigma_{P1}+\sigma_1 = \sigma_{P2}+\sigma_2$, es decir la distribución superficial de carga neta sobre la superficie esférica de radio a es uniforme.

Ejemplo 8: Supongamos un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme superficial σ. A ambos lados del plano hay dos bloques infinitos rectangulares de espesor d hechos de materiales dieléctricos de permitividades ε_1 y ε_2.

a) Encontrar el campo eléctrico en ambos medios

b) Verificar las condiciones de frontera para los campos $\vec{D}$ y $\vec{E}$

c) Encontrar las cargas de polarización

d) Verificar que el campo hallado en la parte (a) es la superposición de los campos producidos por la carga σ y todas las cargas de polarización encontradas en la parte b como si estuvieran todas en el vacío.

Solución:

El campo $\vec{D}$ es sólo debido a la carga extraña o libre (σ en este caso). Puesto que σ está uniformemente distribuida en el plano *YZ*, se puede usar la ley de Gauss para calcular $\vec{D}$ en forma análoga a como se calcula $\vec{E}$ en el vacío.

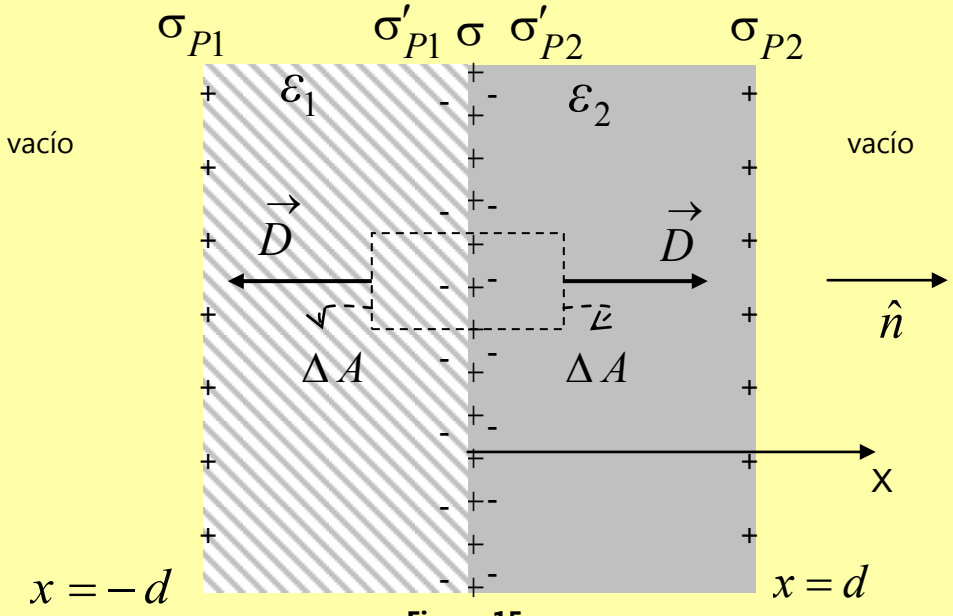


Figura 15

$$2\,D\,\Delta A = \sigma\,\Delta A$$

$$\vec{D}_2 = \frac{\sigma}{2}\hat{n} \quad ; \quad 0 < x < d$$

$$\vec{D}_1 = -\frac{\sigma}{2}\hat{n} \quad ; \quad -d < x < 0$$

a)

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_1}\hat{n} \qquad \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_2}\hat{n}$$

b) Efectivamente se cumplen las condiciones de frontera porque:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad ; \quad E_{2t} = E_{1t} = 0$$

c) Cargas de polarización en $x = d$. (en las otras interfaces los cálculos son similares y las dejamos para que las haga el lector)

$$\sigma_{P2} = \sigma_P\big|_{x=d} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{2\,\varepsilon_2}\,\sigma$$

d) **Verificación de la relación entre el campo eléctrico y sus fuentes**: En un punto interior del dieléctrico ε_2 el campo eléctrico se puede obtener por superposición de la carga superficial σ y de los cuatro planos con cargas de polarización. El resultado se puede escribir así:

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\hat{n} - \frac{\sigma_{P2}}{\varepsilon_0}\,\hat{n}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right\}\hat{n}$$

que es efectivamente el mismo resultado que en la parte a.

5.11 ECUACIÓN DE LAPLACE EN MEDIOS DIELÉCTRICOS

La ley de Gauss en forma diferencial (ec. 23a) para el caso de materiales dieléctricos l.i.h. puede escribirse:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{K\,\varepsilon_0} \qquad (36)$$

La definición de potencial electrostático del capitulo II que se refiere a cargas en el vacío se mantiene para el caso de cargas en dieléctricos (siempre es trabajo por unidad de carga).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \qquad (37)$$

Resulta entonces que en medios dieléctricos se verifica la ecuación de Pöisson:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{K\,\varepsilon_0} \qquad (38)$$

En medios dieléctricos l.i.h. en una región donde no hay carga eléctrica ($\rho = 0$), el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 U = 0 \tag{39}$$

Podemos entonces, resolver todos los problemas que involucran un sólo dieléctrico l.i.h., teniendo como datos las condiciones de Dirichlet o de Neumann, de la misma forma que hemos resuelto problemas electrostáticos en el vacío en el capítulo 3; cambiando solamente ε_0 por $K\,\varepsilon_0$.

En la realidad se presentan muchos problemas de interés en que intervienen dos o más dieléctricos (el vacío es un medio dieléctrico de constante $K = 1$). En estos casos las soluciones electrostáticas particulares se encontrarán teniendo en cuenta, además, las condiciones de frontera (ecs. (32), (34) y (35)).

NOTA: Para dieléctricos no l.i.h. podemos seguir tomando como ecuación fundamental del campo la Ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho - \vec{\nabla} \bullet \vec{P}}{\varepsilon_0} \tag{20b}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\vec{\nabla} \bullet \vec{P} - \rho}{\varepsilon_0} \tag{40}$$

y se obtendrá la ec. de Laplace sólo cuando ρ y $\vec{\nabla} \bullet \vec{P}$ sean cero. En particular cuando ρ sea cero y P sea uniforme.

Ejemplo 9

Entre dos superficies conductoras, cilíndricas, coaxiales muy largas (infinitas) de radios a y c ($a < c$) se ha establecido una diferencia de potencial U_0. Si la región $a < r < b$ se llena con un dieléctrico de constante K_1 y la región $b < r < c$ con uno de constante K_2. Hallar:

a) Los campos $U, \vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$ en cualquier punto de la región $a < r < c$.

b) La densidad superficial de carga libre en cada superficie conductora.

c) La densidad lineal de carga libre en cada superficie conductora.

d) Verificar explícitamente que la carga neta de polarización es nula.

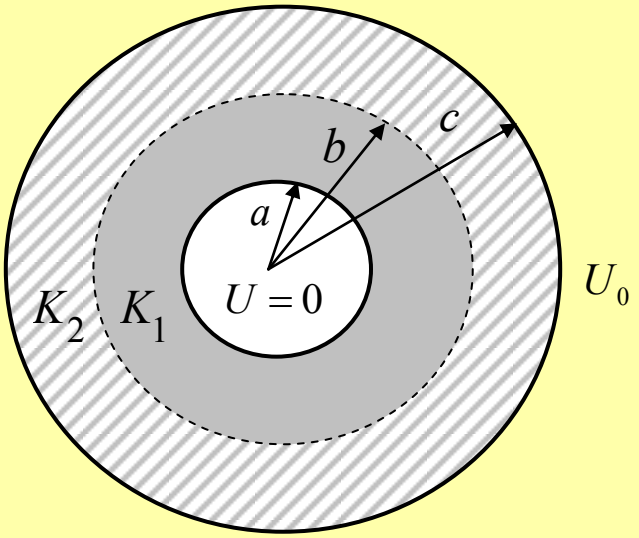


Figura 16 Sección transversal de cilindros coaxiales

Solución

Puesto que se trata de dieléctricos l.i.h. donde no hay cargas libres, U satisface la ec. de Laplace en ambos medios.

Además, como los cilindros son infinitos y U no depende de ϕ ni de z en las superficies conductoras, tendremos:

$$U = U(\rho) \quad \text{ó} \quad U = U(r) \quad ; \quad \text{en ambos medios.}$$

Tenemos que escribir las soluciones a las soluciones a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0$$

En cada medio:

$$U_1(r) = A_1 \ln r + B_1 \quad ; \quad a < r < b$$

$$U_2(r) = A_2 \ln r + B_2 \quad ; \quad b < r < c$$

En estas ecuaciones hay cuatro constantes desconocidas que debemos determinar usando las siguientes condiciones de frontera:

$$U_1(a) = 0 \qquad \text{ó} \qquad A_1 \ln a + B_1 = 0$$

$$U_2(c) = U_0 \qquad \text{ó} \qquad A_2 \ln c + B_2 = U_0$$

$$U_1(b) = U_2(b) \qquad \text{ó} \qquad A_1 \ln b + B_1 = A_2 \ln b + B_2$$

$$K_1 \left.\frac{\partial U_1}{\partial r}\right|_{r=b} = K_2 \left.\frac{\partial U_2}{\partial r}\right|_{r=b} \qquad \text{ó} \qquad A_1 K_1 = K_2 A_2$$

Las ecuaciones de la derecha son cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuyas soluciones son:

$$A_1 = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a} - \frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}}$$

$$A_2 = \frac{U_0}{\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{b}{c}}$$

$$B_1 = -\frac{U_0 \ln a}{\ln\frac{b}{a} - \frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}}$$

$$B_2 = U_0 - \frac{U_0 \ln c}{\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{b}{c}}$$

de tal manera que el potencial electrostático es:

$$U_1(r) = \frac{U_0 \ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a} - \frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}} \quad ; \quad a < r < b$$

$$U_2(r) = \frac{U_0 \ln\frac{r}{c}}{\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{b}{c}} + U_0 \quad ; \quad b < r < c$$

El campo eléctrico es entonces:

$$\vec{E}_1(r) = \frac{-U_0\,\hat{e}_\rho}{r\left(\ln\frac{b}{a} - \frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \vec{E}_2(r) = \frac{-U_0\,\hat{e}_\rho}{r\left(\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{b}{c}\right)}$$

La polarización es:

$$\vec{P}_1(r) = \frac{(1-K_1)\,U_0\,\varepsilon_0\,\hat{e}_\rho}{r\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \vec{P}_2(r) = \frac{(1-K_2)\,U_0\,\varepsilon_0\,\hat{e}_\rho}{r\left(\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a}-\ln\frac{b}{c}\right)}$$

El vector desplazamiento eléctrico en cada medio es:

$$\vec{D}_1(r) = \frac{-K_1\,\varepsilon_0\,U_0\,\hat{e}_\rho}{r\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \vec{D}_2(r) = \frac{-K_2\,\varepsilon_0\,U_0\,\hat{e}_\rho}{r\left(\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a}-\ln\frac{b}{c}\right)}$$

b) La densidad superficial de carga libre es:

$$\sigma\big|_{r=a} = \frac{-K_1\,\varepsilon_0\,U_0}{a\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \sigma\big|_{r=a} = \frac{K_2\,\varepsilon_0\,U_0}{c\left(\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a}-\ln\frac{b}{c}\right)}$$

c) La densidad lineal de carga libre en cada cilindro conductor es:

$$\lambda\big|_{\substack{cil.\\int.}} = \frac{-2\pi K_1\,\varepsilon_0\,U_0}{\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \lambda\big|_{\substack{cil.\\ext.}} = \frac{2\pi K_2\,\varepsilon_0\,U_0}{\left(\frac{K_2}{K_1}\ln\frac{b}{a}-\ln\frac{b}{c}\right)}$$

d) Para verificar que la carga neta de la polarización es nula, calculamos primero las densidades superficiales de carga de polarización y luego, integrando sobre la superficie de un cilindro de altura unidad obtenemos la carga de polarización por unidad de longitud.

$$\sigma_{P1}\big|_{r=a} = \frac{(K_1-1)\,\varepsilon_0\,U_0}{a\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \sigma_{P1}\big|_{r=b} = \frac{(1-K_1)\,\varepsilon_0\,U_0}{b\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)}$$

$$\lambda_{P1}\big|_{r=a} = \frac{2\pi(K_1-1)\,\varepsilon_0\,U_0}{\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \quad ; \quad \lambda_{P1}\big|_{r=b} = \frac{2\pi\,\varepsilon_0\,(1-K_1)}{\left(\ln\frac{b}{a}-\frac{K_1}{K_2}\ln\frac{b}{c}\right)}$$

Hemos mostrado así que en el medio 1 la carga neta de polarización es nula. Podemos evaluar λ_{P2} en $r = b$ y en $r = c$ para completar la parte (d).

Ejemplo 10

Se tiene dos superficies esféricas conductoras de radios a y b ($b > a$). La región entre ellas está semillena con un material dieléctrico de constante K, como se muestra en la fig. (17**).** Si los potenciales de los conductores son respectivamente U_a y U_b; hallar:

a) El potencial, el campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico en cualquier punto de la región $a < r < b$.

b) Encuentre las mismas cantidades que en la parte (a) pero para el caso particular $U_b = 0$, $b \to \infty$.

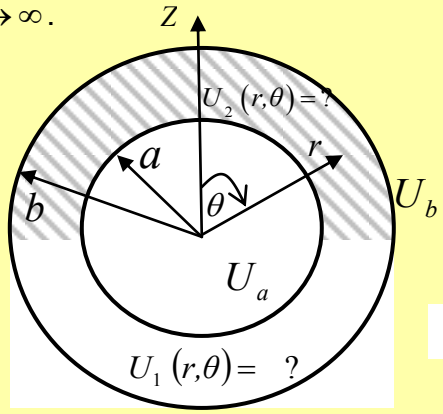


Figura 17

Solución

En la primera parte de esta solución mostraremos que el potencial es independiente de θ, sólo depende de r y por lo tanto tiene las mismas expresiones en ambos medios.

Supongamos que U depende de r y θ, entonces:

$$U_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\text{Cos}\,\theta)$$

y

$$U_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\text{Cos}\,\theta)$$

Puesto que el potencial es siempre continuo en la interfase $\theta = \frac{\pi}{2}$, tendremos:

$$U_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = U_2\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$$

de lo cual se tiene: $A_n = C_n$ y $B_n = D_n$ para todo n; luego:

$$U_1(r,\theta) = U_2(r,\theta) = U(r,\theta)$$

$$U(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\text{Cos}\,\theta)$$

Este potencial debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$U(a,\theta) = U_a$$

$$U(b,\theta) = U_b$$

Se encuentra entonces que todas las constantes A_n , B_n son nulas salvo A_0 y B_0:

$$A_0 = \frac{U_b b - U_a a}{b - a}$$

$$B_0 = \frac{(U_a - U_b)\, a\, b}{b - a}$$

Efectivamente, U depende sólo de r.

$$U(r) = \frac{U_b b - U_a a}{b - a} + \frac{(U_a - U_b) a\, b}{r\,(b - a)}$$

$$\vec{E} = \frac{(U_a - U_b)\, ab}{r^2\,(b - a)}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_0\,(U_a - U_b)\, ab}{r^2\,(b - a)}\,\hat{e}_r \quad ; \quad \vec{D}_2 = \frac{K\,\varepsilon_0\,(U_a - U_b) ab}{r^2\,(b - a)}\,\hat{e}_r$$

Es importante mencionar que en cada hemisferio de la superficie $r = a$ (y $r = b$) las densidades de carga extraña (libre) son diferentes, pero la densidad superficial de carga neta sí es uniforme en cada una de las dos superficies esféricas.

$$\sigma_1\big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_0\,(U_a - U_b)\; b}{a\,(b - a)} \quad ; \quad \sigma_2\big|_{r=a} = \frac{K\varepsilon_0\,(U_a - U_b)\, a}{b\,(b - a)}$$

$$\sigma_{1P}\big|_{r=a} = 0 \qquad ; \quad \sigma_{2P}\big|_{r=a} = \frac{(1-K)\,\varepsilon_0\,(U_a - U_b)\; b}{a\,(b - a)}\,\hat{e}_r$$

b) Si $U_b = 0$ y $b \to \infty$ entonces: $A_0 = 0$ y $B_0 = U_a a$

luego: $$U(r) = \frac{U_a\, a}{r}$$

Ejemplo 11

Para una esfera de material ferroeléctrico, de radio a, con polarización uniforme $\vec{P}$, el potencial y campo eléctrico en puntos interiores y exteriores a la esfera han sido calculados en el ejemplo 4. Demostrar que estos campos satisfacen la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera.

Solución

El potencial encontrado en el ejemplo (4) está dado `por:

$$U_1(r,\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} r \operatorname{Cos}\theta \quad ; \quad r < a$$

$$U_2(r,\theta) = \frac{P a^3}{3\varepsilon_0} \frac{\operatorname{Cos}\theta}{r^2} \quad ; \quad r > a$$

Puesto que estos potenciales están constituidos por el producto de un polinomio de Legendre y la correspondiente potencia de r, efectivamente satisfacen la ecuación de Laplace

El campo eléctrico es:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0} \quad ; \quad r < a$$

$$\vec{E}_2 = \frac{P}{3\,\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \{2 \operatorname{Cos}\theta\, \hat{e}_r + \operatorname{Sen}\theta\, \hat{e}_\theta\} \quad ; \quad r > a$$

Efectivamente, el potencial y el campo eléctrico satisfacen las condiciones de frontera siguientes:

$$U_1(r=0) \neq \infty$$

$$U_2(r \to \infty) = 0$$

$$U_1(r=a) = U_2(r=a)$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial U_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} + \vec{P} \cdot \hat{e}_r = -\varepsilon_0 \frac{\partial U_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

Ejemplo 12

Se tiene en una región vacía un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0$. Se introduce luego una esfera de material dieléctrico de constante K y de radio a. Hallar el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera dieléctrica.

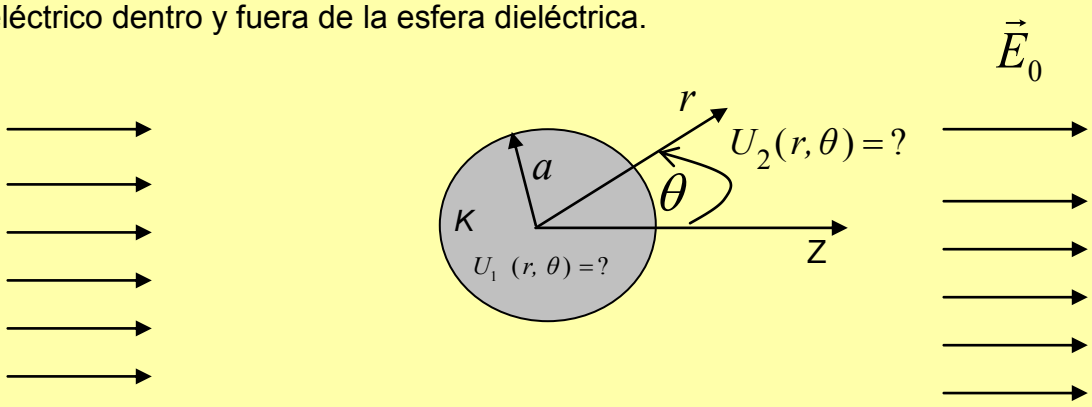


Figura 18

Solución

Tomando como origen el centro de la esfera y como eje *z* la dirección del campo es evidente la simetría azimutal y podemos escribir:

$$U_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\mathrm{Cos}\theta) \tag{41}$$

$$U_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\mathrm{Cos}\theta) \tag{42}$$

Las condiciones de frontera son:

$$U_1(r=0) \neq \infty \tag{43}$$

$$U_2(r\to\infty) = -E_0\, r\,\mathrm{Cos}\,\theta + cte. \tag{44}$$

$$U_1(r=a) = U_2(r=a) \tag{45}$$

$$K \left.\frac{\partial U_1}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial U_2}{\partial r}\right|_{r=a} \tag{46}$$

De las ecs. (41) y (43) se tiene: $B_n = 0$, para todo *n*; luego

$$U_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mathrm{Cos}\theta) \tag{47}$$

De las ecs. (42) y (44) se tiene:

$$C_0 = cte. \quad , \quad C_1 = -E_0 \quad , \quad C_n = 0 \quad , \quad n \geq 2$$

luego:

$$U_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, r^{-(n+1)}\, P_n(\mathrm{Cos}\theta) - E_0\, r\,\mathrm{Cos}\theta + C_0 \qquad (48)$$

De las ecs. (45), (47) y (48):

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, a^n\, P_n(\mathrm{Cos}\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\, a^{-(n+1)}\, P_n(\mathrm{Cos}\theta) - E_0\, a\,\mathrm{Cos}\theta + C_0 \qquad (49)$$

y por lo tanto:

$$A_0 = \frac{D_0}{a} + C_0 \qquad (50a)$$

$$A_1 a = \frac{D_1}{a^2} - E_0\, a \qquad (50b)$$

$$A_n a^n = D_n a^{-(n+1)} \quad \text{para todo } n \geq 2 \qquad (50c)$$

De las ecs. (46), (47) y (48):

$$K \sum_{n=0}^{\infty} n\, A_n\, a^{n-1}\, P_n(\mathrm{Cos}\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)\, D_n\, a^{-(n+2)}\, P_n(\mathrm{Cos}\,\theta) - E_0\,\mathrm{Cos}\theta \qquad (51)$$

y de aquí se obtienen:

$$0 = -\frac{D_0}{a^2} \qquad (52a)$$

$$K\, A_1 = -2\, D_1\, a^{-3} - E_0 \qquad (52b)$$

$$n\, A_n a^n = -(n+1)\, D_n\, a^{-(n+2)} \qquad (52c)$$

Nótese ahora que para cada par de coeficientes tenemos un sistema de dos ecs. De las ecuaciones (50a) y (52a) se obtiene:

$$D_0 = 0 \quad ; \quad A_0 = C_0 = cte.$$

De las ecs. (50b) y (52b):

$$D_1 = E_0\, a^3\, \frac{K-1}{K+2} \quad ; \quad A_1 = -\frac{3\,E_0}{K+2}$$

De las ecs. (50c) y (52c):

$$A_n = D_n = 0 \quad ; \quad n \geq 2$$

Reemplazando los coeficientes no nulos en las ecs. (41) y (42) tenemos:

$$U_1(r,\theta) = -\frac{3\,E_0}{K+2}\, r\,\mathrm{Cos}\theta + U_0 \qquad (53)$$

$$U_2(r,\theta) = \frac{K-1}{K+2} a^3 E_0 \frac{\text{Cos}\,\theta}{r^2} - E_0\, r\, \text{Cos}\,\theta + U_0 \qquad (54)$$

Tomando el gradiente se obtiene:

$$\vec{E}_1 = \frac{3\,\vec{E}_0}{K+2} \qquad (55)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{(K-1)}{(K+2)} a^3 E_0 \left\{ \frac{2\,\text{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{\text{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta \right\} + \vec{E}_0 \qquad (56)$$

Podemos, además, escribir la polarización:

$$\vec{P}_1 = \frac{3\,(K-1)\,\varepsilon_0}{K+2}\,\vec{E}_0 \quad ; \quad \vec{P}_2 = \vec{0}$$

VERIFICACIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE EL CAMPO Y SUS FUENTES

En la ec. (55) se tiene el campo eléctrico en el interior del material dieléctrico; éste tiene dos contribuciones:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_d$$

donde: $\vec{E}_0$ es producido por fuentes externas y $\vec{E}_d$ es el campo debido al mismo material polarizado, es decir, el campo despolarizante.

$$\vec{E}_d = -\frac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0} = \left(\frac{1-K}{K+2}\right)\vec{E}_0 .$$

En el exterior, las ecuaciones (54) y (56) muestran que el campo eléctrico es la superposición del campo externo $\vec{E}_0$ y el campo de un dipolo ubicado en el origen con momento dipolar:

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{K-1}{K+2}\right) a^3\,\vec{E}_0$$

5. 12 CONDUCTORES INMERSOS EN MEDIOS DIELÉCTRICOS

Las propiedades más importante hasta ahora mencionadas para conductores que forman parte de sistemas electrostáticos son: (i) Densidad volumétrica de carga nula, (ii) Son regiones equipotenciales, (iii) Campo interno nulo (iv) Densidad superficial de carga relacionada con el campo eléctrico en la vecindad inmediata por la expresión:

$$\sigma = \vec{D} \bullet \hat{n} \quad \text{ó} \quad \vec{D} = \sigma \hat{n}$$

Si los medios que rodean al conductor son lineales, isotrópicos y homogéneos:

$$\sigma = \varepsilon \vec{E} \bullet \hat{n} \quad \text{ó} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{n} \qquad (57)$$

Ya hemos dicho también que ésta es una relación de coexistencia y no una relación causa efecto, es decir, el campo eléctrico $\vec{E}$ mencionado en la ec. (57) no es creado por la densidad superficial en la vecindad si no por todas las cargas del universo.

Nos proponemos, ahora, dar un argumento para convencernos de que en realidad, la mitad del campo $\vec{E}$ es creado por el elemento de carga eléctrica $\sigma \Delta a$ y la otra mitad es creada por el resto de carga en el mismo conductor y todas las demás cargas influyentes en el sistema electrostático (el universo), es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\sigma} + \vec{E}_{ef}$$

donde $\vec{E}_{\sigma}$ es el campo creado por $\sigma \Delta a$ y $\vec{E}_{ef}$ es creado por todas las demás cargas del universo.

El argumento para mostrar que

$$\vec{E}_{\sigma} = \frac{1}{2} \vec{E}$$

consiste en aproximar el elemento Δa a un disco con densidad superficial de carga uniforme σ y aplicar el resultado del ejemplo 1 del capítulo 2.

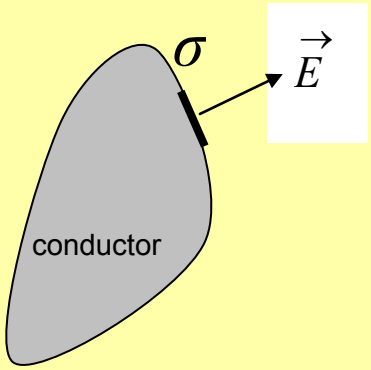


Figura 19

$$\vec{E}_{\sigma}(z) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon}\left\{\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\}\hat{n}$$

que para puntos en la vecindad inmediata $(z \to 0)$ se convierte en :

$$\vec{E}_{\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\hat{n} = \frac{1}{2}\vec{E}$$

FUERZA SOBRE UN CONDUCTOR:

El campo creado por $\sigma\,\Delta a$ no ejerce fuerza sobre sí mismo. La fuerza sobre un conductor inmerso en un sistema de medios l.i.h., entonces, puede expresarse en la forma:

$$\vec{F} = \iint_S \sigma\,\vec{E}_{ef}\,da$$

Puesto que

$$\vec{E}_{ef} = \frac{1}{2}\vec{E}$$

tendremos la siguiente expresión útil para calcular fuerza sobre un conductor en el vacío o medios dieléctricos l.i.h.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\iint_S \sigma\,\vec{E}\,da} \qquad (58)$$

Ejemplo 13

Se tiene un sistema de dos láminas conductoras separadas por un espacio vacío como se muestra en la figura. Hallar la fuerza sobre la lámina conductora en $x = d$.

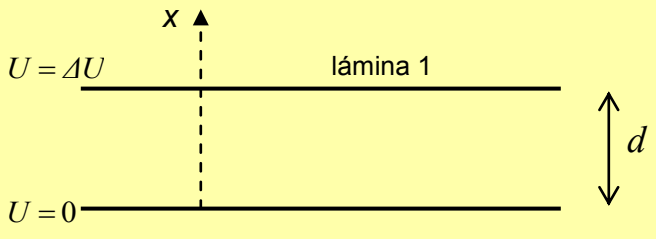


Figura 20

Solución

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\sigma\,\vec{E}\,da$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\iint_A \sigma\,\vec{E}\,da$$

siendo A la superficie de la lámina 1. Despreciando efectos de borde e integrando, tenemos:

$$\vec{E} = -\frac{\Delta U}{d}\,\hat{i} \qquad \sigma = \varepsilon_0\,\frac{\Delta U}{d}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\,A\left(\frac{\Delta U}{d}\right)^2\hat{i}}$$

Ejemplo 14

Calcular la fuerza electrostática sobre una esfera conductora de radio R, a potencial U, con la mitad de su volumen sumergido en un medio dieléctrico l.i.h semiinfinito de constante K.

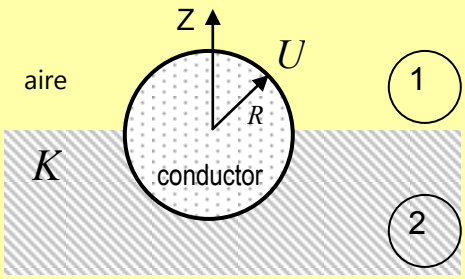


Figura 21

Solución

Debemos ahora escribir la fuerza electrostática en términos de U, K y A.

Sabemos que:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\iint_A \sigma \vec{E}\, da$$

y de acuerdo con la parte b del ejemplo (10).

$$\vec{E}\,(r=R) = \frac{U}{R}\,\hat{e}_r \qquad (*)$$

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 U}{R} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{K\varepsilon_0 U}{R} \qquad (**)$$

Reemplazando (*) y (**) en la ec. (58) obtenenemos:

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon_0 U}{2R}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\frac{U}{R}(\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\phi\,\hat{e}_x + \text{Sen}\,\theta\,\text{Sen}\,\phi\,\hat{e}_y + \text{Cos}\,\theta\,\hat{e}_z)\,R^2\,\text{Sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi +$$

$$\frac{K\varepsilon_0 U}{2R}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U}{R}(\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\phi\,\hat{e}_x + \text{Sen}\,\theta\,\text{Sen}\,\phi\,\hat{e}_y + \text{Cos}\,\theta\,\hat{e}_z)R^2\,\text{Sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi$$

Evaluando tenemos:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{U^2(1-K)\,\pi\,\varepsilon_0}{2}\,\hat{e}_z}$$

PROBLEMAS

1. Una barra delgada de sección transversal A se extiende a lo largo del eje X, desde x = 0 hasta x = L. La polarización de la barra es a lo largo de su longitud y está dada por:

$$\vec{P} = (a x^2 + b)\,\hat{i}$$

a) Encontrar las densidades volumétrica y superficial de carga de polarización.
b) Demostrar explícitamente para este caso que la carga ligada total es nula.

2. En un cubo de material dieléctrico y de lado L la polarización está dada por:

$$\vec{P} = A\,\vec{r}$$

donde A es una constante y $\vec{r}$ es el vector posición respecto al origen, que lo tomamos en el centro del cubo. Encontrar todas las densidades de carga de polarización y mostrar explícitamente que la carga de polarización total es nula.

3. Probar la siguiente relación entre la polarización $\vec{P}$ y las densidades de carga de polarización σ_P y ρ_P para una muestra dieléctrica de volumen V y superficie S:

$$\iiint \vec{P}\,dV = \iiint \rho_P\,\vec{r}\,dV + \iint \sigma_P\,\vec{r}\,da\,,$$

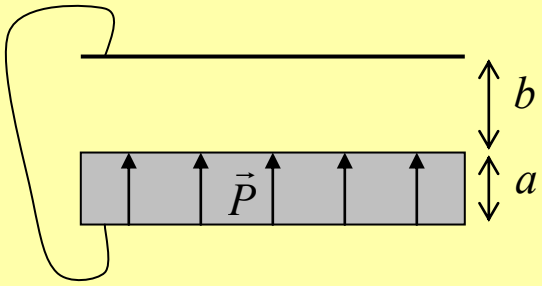
donde $\vec{r}$ es el vector de posición respecto a algún origen fijo.

4. Dos bloques semi infinitos de dieléctrico están colocados de modo tal que existe entre ellos una brecha de anchura constante. La polarización P es uniforme a través de todo el material dieléctrico y hace un ángulo γ con la normal a los planos que limitan la brecha. Determinar el campo eléctrico en la brecha.

5. Dos medios dieléctricos de constantes K_1 y K_2 están separados por una interfase plana. No hay carga libre en la interfase. Encuentre una relación entre los ángulos θ_1 y θ_2 que una línea arbitraria de desplazamiento hace con la normal a la interfase: θ_1 con el medio 1, θ_2 con el medio 2.

6. Un material ferroeléctrico en forma de una plancha de espesor a tiene polarización uniforme permanente $\vec{P}$ en la dirección indicada en la figura. Este material se coloca entre dos placas conductores cuya separación es $(a+b)$ y que están conectadas entre sí por un alambre conductor.

Hallar los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ dentro del material y en la región vacía entre las placas.



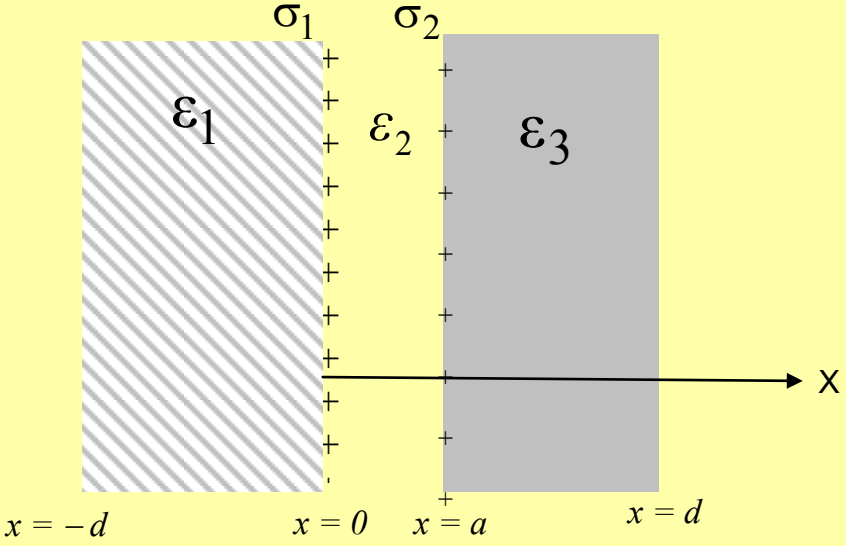
7. Una esfera de material dieléctrico de constante K y de radio R tiene una densidad volumétrica de carga libre ρ uniforme.

a) Encontrar en puntos interiores y exteriores a la esfera: $\vec{D}$, $\vec{E}$, U

b) ¿Cuál es el valor de U en el centro de la esfera?

c) Dé las expresiones para ρ_P y σ_P.

8. Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ debido a dos planos infinitos paralelos con densidades superficiales de carga σ_1 y σ_2 rodeados de tres medios dieléctricos l.i.h como se muestra en la figura. Hallar también las cargas de polarización y verificar que el campo $\vec{E}$ es la suma de los campos producidos por las cargas libres y cargas de polarización como si estuvieran en el vacío.



9. Una esfera dieléctrica de radio R y constante K tiene polarización:

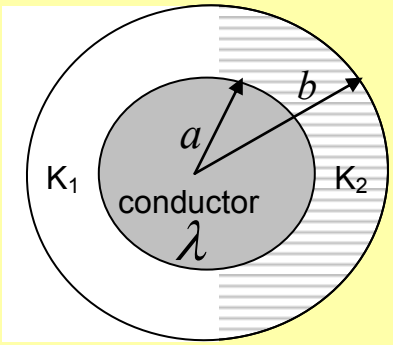
$$\vec{P} = \frac{A}{r}\hat{e}_r$$

a) Calcular las densidades superficiales y volumétricas de carga ligada.
b) Calcular la densidad volumétrica de carga libre.
c) Calcular el potencial dentro y fuera de la esfera.
d) Graficar U en función de r.

10. Un cilindro conductor muy largo, de radio a, tiene carga λ por unidad de longitud y está sumergido coaxialmente en un cilindro circular de material dieléctrico de constante K y de radio b.

a) Demostrar que la carga ligada en la superficie externa del dieléctrico es igual a la de la superficie interna, salvo por el signo.
b) ¿Cuál es el valor de ρ_P ?

11. Determinar el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico en todo el espacio producido por el siguiente sistema: Dos dieléctricos de constantes K_1 y K_2 que forman un cilindro de radios interno a y externo b; y un cilindro conductor de radio a con densidad lineal de carga λ, coaxial con el cilindro dieléctrico.



12. Un cilindro de material dieléctrico, infinitamente largo de radio R = 2 cm y constante dieléctrica K tiene una densidad volumétrica de carga libre ρ uniforme.

a) Hallar los valores de ρ y K si el campo eléctrico tiene valores de 1.0 V/m cuando $r = \pi^{-1}$ cm y de 7.2 V/m cuando $r = \pi$ cm.

b) Encuentre la polarización $\vec{P}$ en cualquier punto del espacio.

c) Halle las densidades de carga de polarización ρ_P y σ_P. Verifique que la carga total de polarización es nula.

13. Se tienen dos placas conductoras paralelas infinitas. La separación entre ellas es d y la diferencia de potencial es U_0. El espacio entre las placas se llena con dos bloques dieléctricos de constantes K_1 y K_2, cada una de espesor $\frac{d}{2}$.

a) Halle el campo eléctrico en cada medio.

b) Verifique la nulidad de la carga de polarización.

c) Halle σ en cada placa conductora.

14. Dos placas conductoras paralelas están separadas una distancia d y mantenidas a la diferencia de potencial ΔU. Un bloque dieléctrico de constante K y espesor $t < d$ es insertado entre las placas. Encontrar :

a) el campo eléctrico en el dieléctrico y en la región vacías entre las placas.

b) la densidad superficial de carga en la placa en contacto con el dieléctrico y en la otra.

c) σ_P sobre la superficie del bloque dieléctrico.

15. Cuando un bloque de material aislante tal como lucita es bombardeado con electrones de alta energía, los electrones penetran en el material y permanecen atrapados dentro. En un ejemplo particular, con un haz de 0.1 microampere se bombardeó un área de 25 cm^2 de lucita (K = 3,2) durante un segundo, y esencialmente todos los electrones quedaron atrapados en la región central en una capa de 2 mm de espesor. El bloque tiene 12 mm de espesor. En los siguientes cálculos desprecie los efectos de borde y asuma una distribución uniforme de los electrones atrapados. Asuma también que ambas caras de la lucita están en contacto con placas conductoras a tierra.

a) Dé expresiones para $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{P}$ en la región (i), donde se ha concentrado la carga libre.

b) Dé expresiones para $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{P}$ en la región (e), donde no hay carga libre.

c) Halle las densidades de carga de polarización donde existan.

d) Dé expresiones para el potencial electrostático en ambas regiones.

e) Grafique E y U en función de la posición.

16. Una esfera conductora de radio R flota sumergida hasta la mitad en un medio dieléctrico liquido de permitividad ε_1. La región por encima del liquido es un gas de permitividad ε_2. La carga libre total sobre la esfera es Q. Hállese $\vec{E}$ en todo el espacio.

17. Un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0$ se ha establecido en un medio de constante dieléctrica K. Demuéstrese que el campo en una cavidad esférica es:

$$\vec{E} = \frac{3K\vec{E}_0}{2K+1}$$

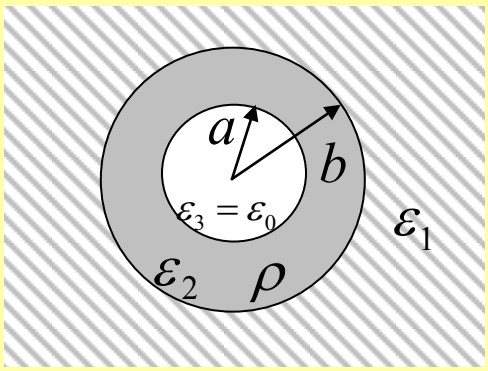
18. Se establece un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0$ en una región vacía y luego se coloca un cilindro circular recto de material de constante dieléctrica K, de longitud infinita y de radio R. El eje del cilindro es perpendicular a la dirección de $\vec{E}_0$. De una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro.

19. Considérese las siguientes regiones esféricas mostradas en la figura:

Región (1): (r > b) existe un dieléctrico de permitividad ε_1.

Región (2): (a < r < b) con un dieléctrico de permitividad ε_2 y densidad volumétrica de carga libre ρ uniforme.

Región (3): (0 < r < a) vacía sin carga.



a) Hallar el campo eléctrico en las tres regiones como función de r, medido a partir de $r = 0$, y verificar que se satisfacen las condiciones de frontera apropiadas.

b) Hallar las densidades de cargas de polarización ρ_P y σ_P.

c) ¿Puede verificarse explícitamente que en este caso la carga total de polarización es nula? Si su respuesta es no; explique el motivo.

20. Una esfera conductora de radio R y carga neta Q está sumergida en un medio dieléctrico de gran extensión cuya permitividad puede expresarse en la forma:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0\left(1+\frac{a}{r}\right)$$

($r \equiv$ distancia desde el centro de la esfera a cualquier punto del espacio.)

a) Determine el potencial electrostático $U(\vec{r})$ en cualquier punto del espacio.

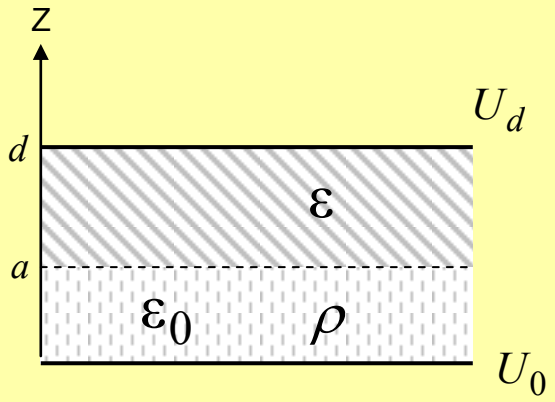
b) Halle también las cargas de polarización.

21. Si el espacio entre dos cáscaras cilíndricas conductoras coaxiales muy largas se llenara con un dieléctrico de permitividad eléctrica variable.

a) ¿Cómo debería variar la permitividad respecto a r (la distancia al eje de los cilindros) de tal manera que el campo eléctrico sea independiente de r ?

b) ¿Cuál seria la densidad volumétrica de carga libre ?

22. Considerar dos conductores planos paralelos, muy grandes, separados una distancia d, como se muestra en la figura. El plano en $z = 0$ es mantenido al potencial U_0 y el plano en $z = d$, al potencial U_d. El espacio comprendido entre $z = 0$ y $z = a$ está lleno con carga de densidad volumétrica ρ constante y el resto del espacio entre las placas lo llena un dieléctrico de permitividad ε constante. Se pide hallar:



a) El potencial en todo punto entre las placas, esto es, para $0 < z < a$ y para $a < z < d$.

b) El campo eléctrico entre las placas.

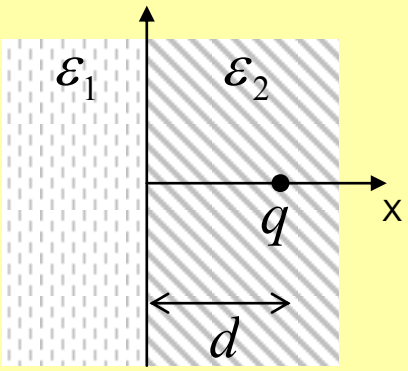
c) Las densidades de carga de polarización, ρ_P y σ_P en el dieléctrico.

d) Las densidades de carga libre en las superficies de las placas conductoras.

23. Dos medios dieléctricos con permitividades ε_1 y ε_2 constantes están separados por una interface plana infinita. Una carga puntual q está en $(d,0,0)$. El potencial en la región 2 es equivalente a la superposición del potencial de q en la posición dada y de una carga imagen q' en la posición $(-d,0,0)$; mientras que en la región 1 se satisface la ecuación de Laplace sin ninguna discontinuidad y el potencial allí es equivalente al de una carga imagen q'' ubicada en $(d,0,0)$.

a) Hallar los valores de q' y q'' que satisfacen las condiciones de frontera.

b) Hacer esquemas de las líneas de fuerza para los casos $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

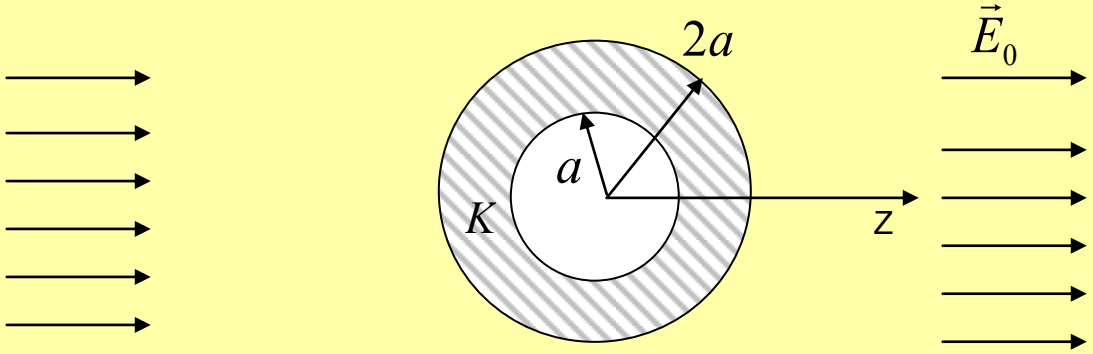


24. Una esfera de radio a está uniformemente polarizada

$$\vec{P} = P\,\hat{k}$$

Halle σ_P y luego por principio de superposición U y $\vec{E}$ en puntos del eje Z, dentro y fuera de la esfera.

25. Una esfera conductora de radio a, neutra, se ha rodeado de una capa de material de constante dieléctrica K, que se extiende desde $r = a$ hasta $r = 2a$. El objeto así formado se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme $\vec{E}_0$. Las cargas positivas y negativas del conductor se separan. Demostrar que la carga total positiva sobre la esfera conductora es: $q = \dfrac{36\,\pi\varepsilon_0\,Ka^2}{5K+7}\,E_0$



26. Un capacitor está compuesto por dos electrodos de área A separados una distancia d, entre ellos hay una diferencia de potencial ΔU.

a) Si entre ellos hay una capa dieléctrica sólida de constante K y admitiendo que el contacto no es perfecto (hay una pequeña capa de aire entre dieléctrico y el conductor); calcule la fuerza entre las placas.

b) Si el dieléctrico es líquido, de igual K y el contacto mucho mejor. ¿Cuál es en este caso la fuerza entre las placas?.

CAPITULO 6

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA Y COEFICIENTES DE POTENCIAL

6.1 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Definición: Se llama Energía Electrostática (W) de una distribución de carga al trabajo que ha hecho algún "agente externo" contra la fuerza electrostática para constituir dicha distribución.

a) ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE DOS CARGAS PUNTUALES:

El ejemplo más simple es el cálculo de la energía electrostática de un sistema de dos cargas puntuales, q_0 en el origen de coordenadas y q_1 en la posición $\vec{r}_1$. Supongamos que este sistema se ha establecido trayendo primero la carga q_0 al origen y luego la carga q_1 a la posición $\vec{r}_1$. Para colocar q_0 en el origen no se hizo ningún trabajo porque la fuerza electrostática sobre ella era nula;

$$W_0 = 0$$

y para transportar a la carga q_1 desde ∞ hasta $\vec{r}_1$ se hace trabajo W_1 contra la fuerza electrostática debida a q_0:

$$W_1 = \int_{\infty}^{\vec{r}_1} -\frac{q_0\, q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{e}_r \cdot d\vec{\ell} = \frac{q_0\, q_1}{4\pi\varepsilon_0\, r_1}$$

La energía electrostática del sistema $W_0 + W_1$ es entonces:

$$W = \frac{q_0\, q_1}{4\pi\varepsilon_0\, r_1} \qquad (1a)$$

Si la posición de la carga q_0 no es el origen sino $\vec{r}_0$, la energía electrostática del sistema de dos cargas puntuales es:

$$W = \frac{q_0\, q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \right|} \tag{1b}$$

En ambos casos podemos escribir:

$$W = q_1\, U(\vec{r}_1) \tag{2a}$$

donde $U(\vec{r}_1)$ es el potencial debido a la carga q_0 evaluado en la posición de q_1. También es posible escribir el mismo resultado en las dos formas siguientes:

$$W = q_0\, U(\vec{r}_0) \quad \text{ó} \quad \boxed{W = \frac{1}{2}\left\{q_0\, U(\vec{r}_0) + q_1\, U(\vec{r}_1)\right\}} \tag{2b}$$

b) ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE N CARGAS PUNTUALES.

Para obtener una expresión que nos dé la energía electrostática de un sistema de N cargas puntuales, suponemos que el sistema se ha constituido trayendo en primer lugar q_N a la posición $\vec{r}_N$, luego la carga q_{N-1} a la posición $\vec{r}_{N-1}$, etc. y finalmente la carga q_1 a la posición $\vec{r}_1$. Si éste es el orden en que se trajeron las cargas y si usamos la notación:

$$r_{j1} = \left| \vec{r}_j - \vec{r}_1 \right|$$

podemos decir que: El trabajo W_1 hecho para traer la carga q_1 desde el infinito hasta $\vec{r}_1$ es:

$$W_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 + \frac{q_2}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{31}} + \ \ldots\ + \frac{q_N}{r_{N1}}\right\},$$

el trabajo hecho para traer la carga q_2 a la posición $\vec{r}_2$ es:

$$W_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 + 0 + \frac{q_3}{r_{32}} + \ \ldots\ + \frac{q_N}{r_{N2}}\right\}$$

y así sucesivamente; para traer q_{N-1} hasta $\vec{r}_{N-1}$ se hace trabajo:

$$W_{N-1} = \frac{q_{N-1}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 + 0 + 0 + \ \ldots\ + \frac{q_N}{r_{N\,N-1}}\right\}$$

Puesto que la carga q_N fue traída primero no se hizo ningún trabajo para traerla. La energía electrostática del sistema es entonces:

$$W = W_1 + W_2 + \ \ldots \ + W_{N\text{-}1} + W_N$$

ó

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 + \frac{q_2\, q_1}{r_{21}} + \frac{q_3\, q_1}{r_{31}} + \ \ldots \ + \frac{q_N\, q_1}{r_{N1}}\right\} +$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 \ + \ 0 \ + \ \frac{q_3\, q_2}{r_{32}} \ + \ldots + \ \frac{q_N\, q_2}{r_{N2}}\right\} +$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ \ldots + \ \frac{q_N\, q_{N-1}}{r_{N\,N-1}}\right\} +$$

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\{\,0 \ + \ \ 0 \ + \ \ \ 0 \ + \ \ldots \ + \ 0\ \} \qquad (3)$$

Ordenados de esta manera los términos, la energía W aparece como la suma de los elementos de una matriz triangular y esta suma no varia si dividimos entre 2 todos los términos y sumamos los términos de la matriz transpuesta, es decir:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0 \ + \ \frac{q_2\, q_1}{2\, r_{21}} \ + \ \frac{q_3\, q_1}{2\, r_{31}} \ + \ \ldots \ + \ \frac{q_N\, q_1}{2\, r_{N1}}\right\} \ +$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1\, q_2}{2\, r_{12}} \ + \ 0 \ + \ \frac{q_3\, q_2}{2\, r_{32}} \ + \ \ldots \ + \ \frac{q_N\, q_2}{2\, r_{N2}}\right\} \ +$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1\, q_N}{2\, r_{1N}} \ + \ \frac{q_2\, q_N}{2\, r_{2N}} \ + \ \frac{q_3\, q_N}{2\, r_{3N}} \ + \ \ldots \ + \ 0\right\} \qquad (4)$$

Puede notarse ahora que cada línea es de la forma:

$$\frac{1}{2}\, q_j\, U_{\mathrm{j}}$$

donde $U_j = U(\vec{r}_j)$ es el potencial en $\vec{r}_j$ debido a todas las cargas puntuales del sistema excepto la q_j. La energía electrostática del sistema es entonces:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j U_j \tag{5}$$

Por supuesto, la ec. (4) también puede escribirse en la forma:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N}\frac{1}{2}\frac{q_j\, q_i}{r_{ji}} \tag{6}$$

Si la distribución de carga está en un medio dieléctrico l.i.h. caracterizado por ε, la ecuación (5) sigue siendo válida pero en la ecuación (6) hay que poner ε en lugar de ε_0.

c) ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE UNA DISTRIBUCIÓN VOLUMÉTRICA

Teniendo en cuenta que una distribución volumétrica de carga es una superposición continua de cargas puntuales $dq = \rho\, dV$, podemos seguir utilizando la ecuación (5), pero en este caso la sumatoria deviene en una integral de volumen, concretamente:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, dV' \tag{7}$$

d) ENERGÍA ELECTROSTÁTICA DE UNA DISTRIBUCIÓN SUPERFICIAL

En este caso podemos considerar $dq = \sigma\, da$ y la sumatoria (5) toma la forma de una integral de superficie:

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, da' \tag{8}$$

Si la distribución superficial de carga está sobre un conductor, $U(\vec{r}\,')$ es uniforme y se tiene:

$$W = \frac{1}{2} Q\, U$$

y si tenemos *N* conductores cargados, es evidente que de la ecuación (8) obtendremos:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} Q_j U_j \qquad (9)$$

Aunque las ecuaciones (5) y (9) tienen la misma forma, hay diferencias importantes entre ellas. A saber:

i) En la ecuación (9) U_j es el potencial del j-ésimo conductor debido tanto a su propia carga como a la carga de los demás conductores, mientras que la ec. (5) U_j es el potencial en la posición de la carga q_j debido a todas las cargas salvo ella misma.

ii) La ec. (9) incluye el trabajo gastado en colocar la carga Q_j sobre cada conductor, es decir, la energía propia de cada conductor.

Ejemplo 1

Hallar la energía potencial de un sistema de tres cargas puntuales q ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado "a".

Solución

$$W = 3\left(\frac{1}{2} q U\right)$$

donde

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{a} + \frac{q}{a}\right\}$$

Luego:

$$W = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$$

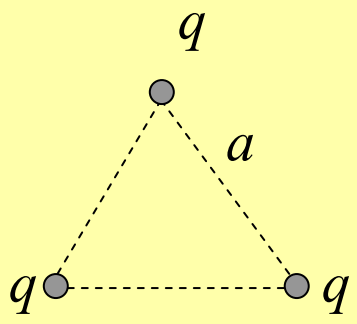


Figura 1

Ejemplo 2

Hallar la energía electrostática asociada con una distribución uniforme de carga ρ_0 sobre una esfera de radio "a".

Solución:

En la región $r \geq a$ el campo eléctrico es:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 \, a^3}{3 \, \varepsilon_0 \, r^2} \hat{e}_r$$

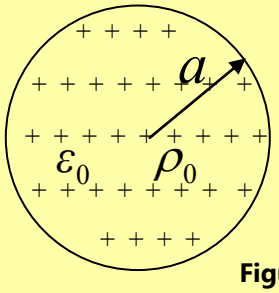


Figura 2

Y en la región $r \leq a$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3 \, \varepsilon_0} r \, \hat{e}_r$$

Aplicando la definición de potencial:

$$U(r) = \int_{\infty}^{r} - \vec{E} \bullet d\vec{\ell}$$

en puntos $r < a$ tenemos:

$$U(r) = \frac{\rho_0 \, a^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \int_a^r r \, dr$$

ó

$$U(r) = \frac{\rho_0 \, a^2}{2 \, \varepsilon_0} - \frac{\rho_0 \, r^2}{6 \, \varepsilon_0}$$

Reemplazando este valor en la ec. (7) y evaluando la correspondiente integral se obtiene:

$$W = \frac{4\pi \, \rho_0^2 \, a^5}{15 \, \varepsilon_0}$$

Ejemplo 3

Una esfera conductora de radio a y carga neta Q tiene su centro a una distancia d de una carga puntual q $(d > a)$. Encontrar la energía potencial electrostática del sistema.

Solución:

De acuerdo con los ejemplos 6 y 7 del capítulo 4, tomando origen O el centro de la esfera y definiendo como eje *Z* la dirección de O a la carga q, tendremos:

$$U_{esfera} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q + q\frac{a}{d}}{a}$$

$$U(0,0,d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q+q\frac{a}{d}}{d} - \frac{q\frac{a}{d}}{d-\frac{a^2}{d}}\right\}$$

Luego, de acuerdo con ecs. (5) y (9) la energía potencial electrostática del sistema es:

$$W = \frac{1}{2}QU_{esfera} + \frac{1}{2}qU(0,0,d)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q^2}{2a} + \frac{qQ}{d} + \frac{1}{2}\frac{q^2a}{d^2} - \frac{q^2a}{2}\frac{1}{\left(d^2-a^2\right)}\right]$$

6.2 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA EN FUNCIÓN DE LOS CAMPOS E Y D

Una distribución de cargas libres ρ y σ da lugar a que se establezca en todo el espacio un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo $\vec{D}$. En lugar de escribir una expresión para W en función de ρ, σ y U; vamos a escribirla en función de $\vec{D}$ y $\vec{E}$.

Supongamos una carga volumétrica ρ inmersa en medios dieléctricos l.i.h y carga superficial σ sólo en conductores, los cuales están rodeados de medios dieléctricos l.i.h. (ver figura.)

S_c: Superficie de conductor

V: Volumen donde se distribuye la densidad volumétrica de carga.

S: Superficie frontera de V.

S_∞ Superficie muy alejada del sistema

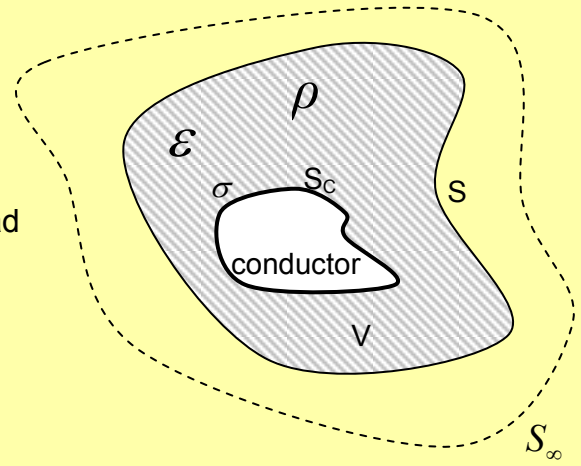


Figura 3

La energía electrostática para este sistema es:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{V} \rho\, U\, dV + \frac{1}{2}\iint_{S_c} \sigma\, U\, da \qquad (10)$$

Puesto que para puntos $\vec{r}$ fuera de V, $\rho(\vec{r})$ es cero, W se puede escribir también como:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty} \rho\, U\, dV + \frac{1}{2}\iint_{S_c} \sigma\, U\, da \qquad (11)$$

Siendo V_∞ todo el volumen externo a la superficie del conductor S_c, es decir un volumen muy grande, tendiendo al infinito.

Recordando que

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D} \quad \text{y} \quad \sigma = \vec{D} \cdot \hat{n}$$

La ecuación (11) puede escribirse ahora como:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty} (U \operatorname{div} \vec{D})\, dV + \frac{1}{2}\iint_{S_c} (\vec{D} \cdot \hat{n})\, U\, da \qquad (12)$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\operatorname{div} f\vec{F} = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$$

podemos escribir:

$$U \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(U\vec{D}) - \vec{D} \cdot \operatorname{grad} U \quad \text{ó}$$

$$U \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(U\vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Y la ec. (12) toma la forma:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty} \operatorname{div}(U\vec{D})\, dV + \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty} (\vec{D} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{2}\iint_{S_c} (\vec{D} \cdot \hat{n})\, U\, da \qquad (13)$$

Aquí podemos aplicar el teorema de la divergencia al primer sumando para obtener:

$$W = \frac{1}{2}\iint_{S_\infty}(U\,\vec{D}\bullet\hat{n}')\,da + \frac{1}{2}\iint_{S_c}U\,\vec{D}\bullet(-\hat{n}\,da) + \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty}(\vec{D}\bullet\vec{E})\,dV + \frac{1}{2}\iint_{S_c}U\,\vec{D}\bullet\hat{n}\,da \quad (14)$$

donde S_∞ es una superficie que encierra a las distribuciones de carga pero que está muy alejada de ellas, esto es como si se tratara de una esfera de radio R $(R\to\infty)$ con centro en el centro de cargas de las distribuciones. Por otro lado, la ec. (14) tiene en realidad sólo dos términos efectivos, que son:

$$W = \frac{1}{2}\iint_{S_\infty}(U\,\vec{D}\bullet\hat{n}')\,da + \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty}(\vec{D}\bullet\vec{E})\,dV \quad (15)$$

El primer sumando puede escribirse aproximadamente como:

$$\frac{1}{2}\iint_{S_\infty}(U\,\vec{D}\bullet\hat{n}')\,da = \frac{1}{2}U(R)\,D(R)\,4\pi R^2 \quad (16)$$

Si la carga neta de la distribución es diferente de cero se tiene:

$$U(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

y

$$D(R) = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Luego:

$$\frac{1}{2}\iint_{S_\infty}(U\,\vec{D}\bullet\hat{n}')\,da = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

Y como se mencionó anteriormente, $R\to\infty$, entonces:

$$\frac{1}{2}\iint_{S_\infty}(U\,\vec{D}\bullet\hat{n}')\,da = 0 \quad (17)$$

Reemplazando (17) en (15) tendremos:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{V_\infty}(\vec{D}\bullet\vec{E})\,dV$$

Esta integral sobre V_∞ es lo mismo que la integral sobre todo el espacio, puesto que $\vec{D}$ y $\vec{E}$ dentro del conductor son nulos. Luego:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{Todo\ el \\ espacio}} (\vec{D} \bullet \vec{E})\, dV \qquad (18)$$

Puesto que la expresión (18) es válida para medios lineales, también se puede escribir de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{Todo\ el \\ espacio}} \varepsilon E^2 dV \qquad (18a)$$

Las ecs. (18) sugieren que la energía electrostática está distribuida en todo el espacio, es decir, en cada elemento de volumen dV existe una energía:

$$dW = \frac{1}{2} (\vec{D} \bullet \vec{E})\, dV$$

Razón por la cual podemos definir, **densidad de energía** w, por la ec.:

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \bullet \vec{E} \qquad (19)$$

Por otro lado, la ecuación (11) nos muestra que la misma energía W puede obtenerse integrando sólo en las regiones donde existen cargas. Cabe entonces preguntarse: ¿Dónde está almacenada la energía, en las cargas o en el campo eléctrico?.

Si nos restringimos a la electrostática, la pregunta sobre la localización de la energía no es relevante. En el estudio de la propagación de la radiación electromagnética sí es muy importante manejar la idea de que la energía está asociada a los puntos del espacio donde hay un campo eléctrico.

Ejemplo 4

Usando la ec. (18), hallar la energía electrostática de una esfera de radio a con densidad uniforme de carga ρ_0.

Solución

En la región $r > a$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 \, a^3}{3 \, \varepsilon_0 \, r^2} \, \hat{e}_r$$

En la región $r < a$:

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3 \, \varepsilon_0} \, r \, \hat{e}_r$$

De acuerdo con la ec. (18):

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_a^{\infty} E_1^2 \, (4 \pi \, r^2 \, dr) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_0^a E_2^2 \, (4 \pi \, r^2 \, dr)$$

Al reemplazar $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ por sus respectivos valores y efectuando la integral, obtendremos:

$$W = \frac{4 \pi \, \rho_0^2 \, a^5}{15 \, \varepsilon_0}$$

Ejemplo 5

Inicialmente se tiene una cáscara esférica de dieléctrico (radio interior a, radio exterior b y constante dieléctrica K) y una carga puntual q, infinitamente separadas. Si se traslada la carga puntual q hasta el centro de la cáscara dieléctrica, ¿cuál es el cambio en la energía del sistema?

Solución

Consideremos la carga puntual como una esfera conductora de radio R $(R << a)$.

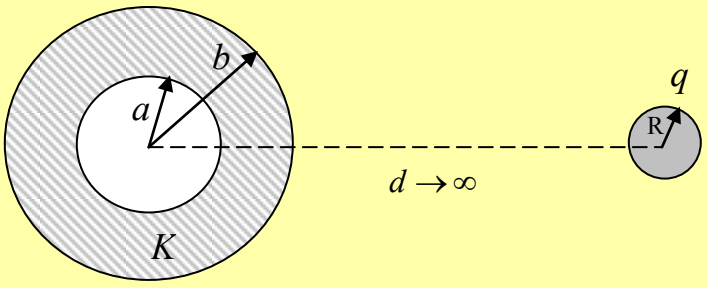


Figura 4

La energía electrostática inicial es:

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

y en la situación final, cuando la esfera de radio R se ha colocado en el centro del cascarón esférico:

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r; \quad R < r < a$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi K\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r; \quad a < r < b$$

$$\vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r; \quad r > b$$

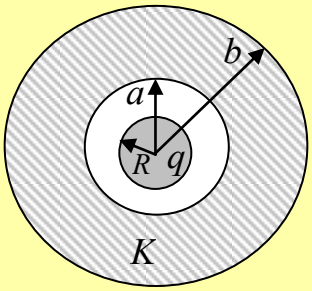


Figura 5

$$W_f = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^a E_1^2\,(4\pi r^2 dr) + \frac{1}{2}K\varepsilon_0\int_a^b E_2^2\,(4\pi r^2 dr) + \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_b^\infty E_3^2\,(4\pi r^2 dr)$$

$$W_f = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{K}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b}\right]$$

Luego, el cambio en la energía del sistema es:

$$\Delta W = W_f - W_i$$

$$\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{b-a}{a\,b}\right)\frac{1-K}{K}\right]$$

6.3 CAPACITORES

Definición: Un capacitor (o condensador) es un sistema de dos conductores dispuestos de tal manera que todas las líneas de fuerza que salen de uno de ellos terminan en el otro.

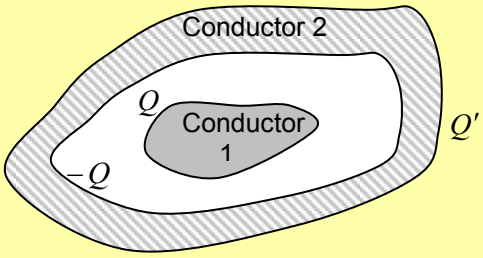


Fig. 6 El conductor 1 está encerrado por el conductor 2. Todas las líneas de fuerza que salen del 1 llegan al 2. El sistema es un capacitor.

Es importante notar en la fig. 6, que el campo eléctrico entre las armaduras del capacitor no tiene nada que ver con la carga Q' en la superficie externa de la armadura 2. En consecuencia, la diferencia de potencial ΔU entre los conductores 1 y 2 depende sólo de la carga Q de la armadura interna.

Definición: Se llama capacitancia (o capacidad) de un capacitor a la razón:

$$C = \frac{Q}{\Delta U} \ , \tag{20}$$

donde $\Delta U = U_1 - U_2$ es la diferencia de potencial entre las armaduras del capacitor.

Las cantidades Q y ΔU pueden expresarse en términos del campo eléctrico que hay entre los conductores 1 y 2. Por lo tanto podemos escribir:

$$C = \frac{\oiint_{S_1} \varepsilon \vec{E} \bullet \hat{n}\, da}{\int_2^1 -\vec{E} \bullet d\vec{\ell}} = \frac{\oiint \varepsilon \vec{E} \bullet d\vec{a}}{\int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{\ell}} \tag{21}$$

A la unidad de capacitancia (Coulomb/Voltio), se le llama FARADIO.

Son comunes los capacitores con capacitancias del orden $10^{-6}\,\mathrm{F}$ (microfaradio), $10^{-9}\,\mathrm{F}$ (nanofaradio), $10^{-12}\,\mathrm{F}$ (picofaradio); también hay supercapacitores de 10^3 F.

En el caso de geometrías arbitrarias resulta difícil encontrar la capacitancia por métodos analíticos; en tales casos es mejor usar métodos experimentales o métodos aproximados. Pero en algunos casos de geometría sencilla se puede hallar la capacitancia C en forma analítica con mucha facilidad.

Ejemplo 6

Hallar la capacitancia por unidad de longitud de un capacitor formado por un cilindro de radio R_1 y una cáscara cilíndrica coaxial de radio interno R_2, $(R_2 > R_1)$. Ambos conductores son muy largos y el medio entre los conductores es aire.

Solución

Suponiendo que λ es la carga por unidad de longitud en el cilindro interno, tendremos para puntos de la región $R_1 < r < R_2$:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_\rho$$

Y por lo tanto:

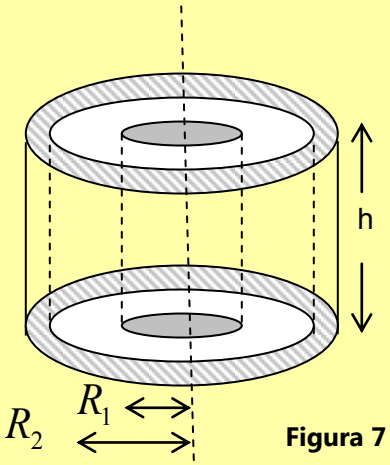


Figura 7

$$\Delta U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Reemplazando este valor de ΔU en la definición de capacitancia (ec. 20) tenemos:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_\ell = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

Ejemplo 7

Hallar la capacitancia de un capacitor formado por una esfera de radio R_1 y un cascarón esférico de radio interno R_2, $(R_1 < R_2)$. El medio entre ellos es aire.

Solución

Suponiendo carga Q en el conductor de radio R_1, el campo eléctrico en cualquier punto de la región $R_1 < r < R_2$ es:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

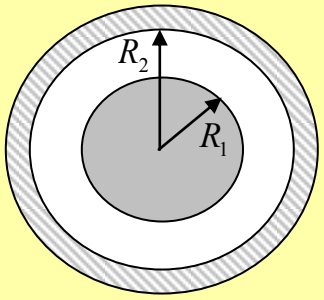


Figura 8

Por lo tanto:

$$\Delta U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_2^1 -\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1\, R_2}$$

Reemplazando esta expresión de ΔU en la definición de capacitancia (ec. 20), tenemos:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1\, R_2}{R_2 - R_1}$$

Ejemplo 8

Hallar la capacitancia de un capacitor plano de placas paralelas de área *A* separadas una distancia *"d"*. El dieléctrico entre las placas es l.i.h de permitividad ε.

Solución

Suponiendo densidad superficial uniforme y despreciando efectos de borde; entre ambas armaduras, se tiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{n} = \frac{Q}{\varepsilon\, A}\hat{n}$$

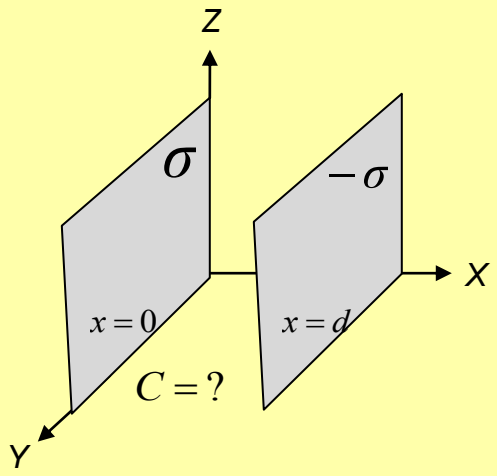


Figura 9

Y por lo tanto:

$$\Delta U = \left(\frac{Q}{\varepsilon A}\right) d$$

Reemplazando este valor en la ec. (20), se tiene:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

NOTA: Como puede verse en los tres ejemplos anteriores, la capacitancia C no depende de los valores de la carga. Depende sólo de la permitividad eléctrica del medio entre ambos conductores y de la geometría del sistema.

CAPACITORES REALES Un capacitor real está generalmente constituido por armaduras que no son necesariamente planos pero que están separados una distancia d muy pequeña respecto a las dimensiones y a los radios de curvatura de las placas. En tales casos siempre es una buena aproximación el resultado del capacitor plano.

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{22}$$

Se puede verificar para los casos del capacitor cilíndrico (ejemplo 6) y del capacitor esférico (ejemplo 7) que si $R_2 = R_1 + d$, siendo d muy pequeño, efectivamente se obtiene para la capacitancia la ec. (22).

ENERGIA DE UN CAPACITOR Para hallar la energía W de un sistema de conductores podemos usar la ec. (9). En el caso particular de la figura 6:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 U_1 + \frac{1}{2} Q_2 U_2$$

$$W = \frac{1}{2} Q U_1 + \frac{1}{2} (-Q + Q') U_2$$

$$W = \frac{1}{2} Q (U_1 - U_2) + \frac{1}{2} Q' U_2$$

$$W = \frac{1}{2} Q (\Delta U) + \frac{1}{2} Q' U_2$$

Habitualmente, por razones prácticas, se restringe el término capacitor a los casos en que las cargas de ambas armaduras son iguales y de signo contrario, es decir, $Q' = 0$. Para tales casos:

$$W = \frac{1}{2} Q (\Delta U) \tag{23}$$

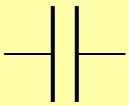
que puede escribirse también como:

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta U)^2 \tag{23b}$$

ó

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{23c}$$

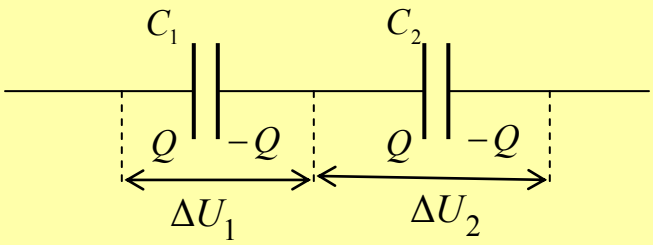
CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO En un circuito es común representar un capacitor por el símbolo:



Si se tienen dos capacitores **en serie**, el valor de la carga Q es común para ambos capacitores y la diferencia de potencial entre las placas de cada uno de ellos son:

$$\Delta U_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \text{y} \qquad \Delta U_2 = \frac{Q}{C_2},$$

respectivamente.



El sistema puede ser reemplazado por un solo capacitor de capacitancia equivalente tal que:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{Q}{C}$$

Es decir:

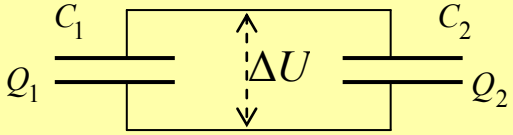
$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

Luego:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24}$$

Si se tiene dos capacitores **en paralelo**, la diferencia de potencial ΔU es común para ambos y es tal que:

$$Q_1 = C_1 \Delta U \qquad \text{y} \qquad Q_2 = C_2 \Delta U$$



La carga equivalente de un capacitor debe satisfacer:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C\,\Delta U$$

Y por lo tanto:

$$C = C_1 + C_2 \tag{25}$$

Ejemplo 9

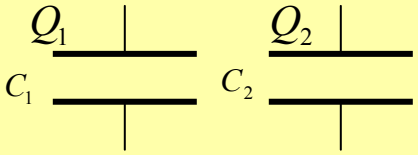
Dos capacitores aislados uno del otro, con capacitancias C_1 y C_2, tienen cargas Q_1 y Q_2 respectivamente.

a) Calcular la cantidad de energía disipada cuando se conectan en paralelo.

b) ¿Cómo es que se disipa esta energía?

Solución

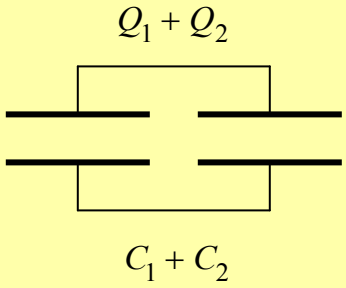
Cuando los capacitores están separados, la energía es:



$$W_i = \frac{Q_1^2}{2\,C_1} + \frac{Q_2^2}{2\,C_2}$$

Y cuando se conectan en paralelo se tiene:

$$W_f = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(Q_1+Q_2)^2}{2\,(C_1+C_2)}$$



El cambio en la energía del sistema es entonces:

$$\Delta W = W_f - W_i = -\frac{(Q_1\,C_2 - Q_2\,C_1)^2}{2\,(C_1+C_2)\,C_1\,C_2}$$

El signo menos indica que la energía electrostática del sistema ha disminuido. En efecto ha habido disipación de energía:

$$\boxed{|\Delta W| = \frac{(Q_1\,C_2 - Q_2\,C_1)^2}{2\,(C_1+C_2)\,C_1\,C_2}}$$

b) La energía se disipa porque las fuerzas electrostáticas hacen trabajo para redistribuir las cargas en los conductores. Este trabajo se transforma finalmente en calor por efecto Joule y en radiación electromagnética.

Ejemplo 10

Un capacitor que consiste de dos esferas concéntricas está dispuesto de tal forma que la esfera externa puede ser separada y removida sin perturbar las cargas de la otra. El radio de la esfera interna es R_1, el cascarón esférico externo es tan delgado que puede asumirse que sus radios interno y externo ambos son iguales a R_2. Las cargas de los conductores son Q y $-Q$ respectivamente.

i) Si la esfera externa es removida y restaurada a su forma original. Hallar el incremento de energía cuando las dos esferas están separadas por una gran distancia.

ii) ¿De dónde salió esta energía?

Solución

i) Cuando las esferas están dispuestas en forma de un capacitor esférico, la energía es:

$$W_i = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$$

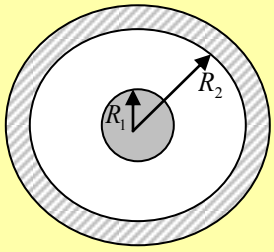


Figura 10a

Cuando las esferas están muy alejadas, la energía es:

$$W_f = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

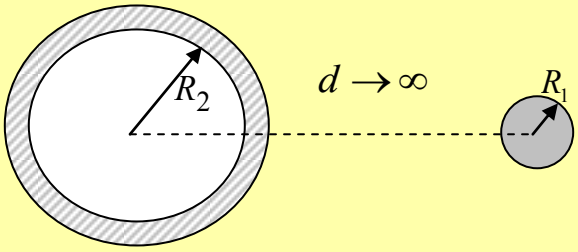


Figura 10b

El incremento de energía es:

$$\Delta W = W_f - W_i = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

ii) El incremento de energía lo proporciona algún dispositivo ajeno al sistema, necesario para llevar la esfera de radio R_1 hasta el infinito.

6.4 CÁLCULO DE FUERZAS Y TORQUES A PARTIR DE LA ENERGÍA

Consideremos un sistema de conductores cargados, los cuales están inmersos en medios dieléctricos l.i.h. sin cargas extrañas. Deseamos calcular, a partir de una expresión para la energía del sistema W, la fuerza sobre uno de los objetos que lo constituyen. Tal objeto puede ser un conductor o un trozo de material dieléctrico. El método empleado para deducir la expresión de la fuerza a partir de la energía es el método del desplazamiento virtual.

PRIMER CASO: SISTEMA AISLADO. (La carga total del sistema se mantiene constante). Si el objeto en observación experimentara un desplazamiento $d\vec{\ell}$, entonces la fuerza electrostática que actúa sobre él haría un trabajo mecánico:

$$dW_m = \vec{F} \bullet d\vec{\ell} \tag{26}$$

ó

$$dW_m = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \tag{26a}$$

En este caso de sistema aislado, el trabajo dW_m se hace a costa de la energía electrostática W del sistema mismo y por lo tanto ésta experimentará un decremento;

$$dW = -dW_m = -\vec{F} \bullet d\vec{\ell} \tag{27}$$

ó

$$-dW = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \tag{27a}$$

Si conociéramos cómo varía W en función de la posición del objeto, podríamos entonces obtener la fuerza que actúa sobre él, puesto que de la ecuación (27a) es inmediato que:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad , \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \tag{28}$$

Para el caso de objetos puntuales se puede escribir:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W . \tag{28a}$$

Si el objeto en consideración está restringido a girar respecto a un eje, tendremos:

$$d\vec{\ell} = \vec{v}\, dt = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

donde $d\vec{\theta}$ es un vector de módulo $d\theta$, perpendicular al plano de rotación y sentido dado por la regla de la mano derecha. La ec. (27) puede escribirse ahora como:

$$-dW = \vec{F} \bullet (d\vec{\theta} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \bullet d\vec{\theta}$$

ó

$$-dW = \vec{\tau} \bullet d\vec{\theta} \tag{29}$$

donde $\vec{\tau}$ es el torque debido a la fuerza electrostática.

De forma análoga, como se dedujo la ec. (28) de la ec. (27a), de la ec. (29) se puede obtener lo siguiente:

$$\tau_x = -\frac{\partial W}{\partial \theta_x} \quad , \quad \tau_y = -\frac{\partial W}{\partial \theta_y} \quad , \quad \tau_z = -\frac{\partial W}{\partial \theta_z} \tag{30}$$

donde $\theta_x , \theta_y , \theta_z$, son desplazamientos angulares en los planos perpendiculares a los ejes x, y, z respectivamente.

Conviene re escribir Las expresiones para las fuerzas y torques que acabamos de obtener, de la siguiente manera:

$$F_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q \tag{31}$$

$$\tau_x = -\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_x}\right)_Q \tag{32}$$

para enfatizar que nuestro sistema está aislado, es decir, que la carga Q de los conductores se mantiene constante.

Ejemplo 11

Las dimensiones de un capacitor plano son: w, l y d; su carga es Q y está lleno con un material aislante de constante K. Hallar la fuerza sobre el bloque aislante cuando sólo queda de éste dentro del capacitor una longitud x.

Solución

Podemos escribir la energía del sistema como:

$$W = \frac{Q^2}{2\,C}$$

donde:

$$C = \frac{K\,\varepsilon_0\,x\,w}{d} + \frac{\varepsilon_0\,w\,(l-x)}{d}$$

Es decir:

$$W = \frac{Q^2\,d}{2\left[K\,\varepsilon_0\,x\,w + \varepsilon_0\,w\,(l-x)\right]}$$

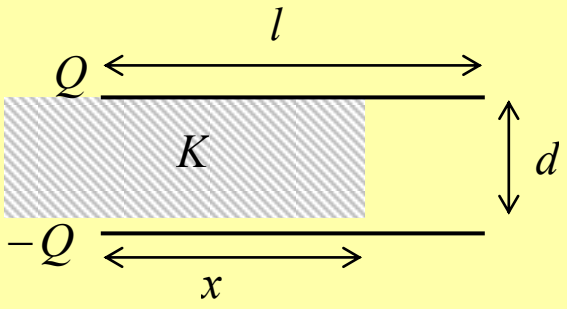


Figura 11

Y la fuerza viene dada por:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q \hat{i}$$

Osea:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2\,d\,(K-1)}{w\,\varepsilon_0\,\left[(K-1)\,x + l\right]^2}\,\hat{i}$$

SEGUNDO CASO: CONDUCTORES A POTENCIAL CONSTANTE

El potencial se mantiene fijo conectando baterías a los conductores. Para calcular la fuerza sobre uno de los elementos del sistema debemos tener en cuenta que:

i) Si un objeto del sistema se desplazara $d\vec{\ell}$ por efecto de la fuerza electrostática, ésta haría sobre aquel un trabajo mecánico:

$$dW_m = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \qquad (33)$$

ii) Puesto que la posición relativa de los elementos del sistema variaría, la energía electrostática del sistema también variaría p. ej. de W a $W + dW$.

iii) Si no hubieran baterías conectadas a los conductores, estos variarían su potencial. Para mantener el potencial constante, las baterías llevan cargas a los conductores y para ello hacen trabajo dW_b.

iv) Por principio de conservación de la energía:

$$dW_b = dW_m + dW \qquad (34)$$

v) Para llevar la carga dQ_j al conductor, con potencial U_j, una batería debe hacer trabajo $U_j\, dQ_j$, luego:

$$dW_b = \sum_{j=1}^{N} U_j\, dQ_j$$

vi) De la ec. (9) y considerando que los U_j son constantes, obtenemos

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} U_j\, dQ_j$$

es fácil ver que:

$$dW_b = 2\, dW \qquad (35)$$

Reemplazando (35) en (34), vemos que:

$$dW = dW_m$$

Y por lo tanto:

$$dW = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \qquad (36)$$

De esta expresión se deduce que:

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_U \qquad (37)$$

Y similares para F_y y F_z. El subíndice U significa que esta expresión es válida cuando el potencial de los conductores se mantiene constante.

Si el objeto en estudio, está restringido a girar respecto a un eje, por ejemplo 0x, podemos obtener para el torque la expresión;

$$\tau_x = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta_x} \right)_U \tag{38}$$

Ejemplo 12

Un capacitor de placas paralelas cuya separación es d, tiene la región entre ellas llena con un bloque de dieléctrico macizo de permitividad ε. Las dimensiones de cada placa son: longitud b y ancho w. Las placas se mantienen a la diferencia de potencial constante, ΔU . Si el bloque de dieléctrico se va sacando a lo largo de la dimensión b hasta que quede la longitud x entre las placas. Calcúlese la fuerza que tiende a colocar el bloque, nuevamente a su lugar.

Solución

A partir de la ec.:

$$W = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon \, E^2 dV$$

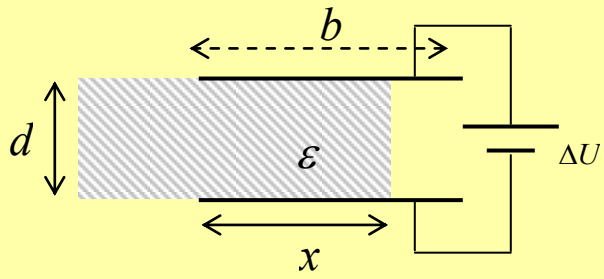


Figura 12

podemos obtener en este caso:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\Delta U}{d} \right)^2 x \, w \, d + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta U}{d} \right)^2 w \, (b - x) \, d$$

y usando la ec. (37) tenemos la fuerza:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \, w \, \frac{(\Delta U)^2}{d} \, \hat{i}$$

El lector puede verificar que los resultados de los ejemplos 11 y 12 son iguales. En realidad no se trata de dos situaciones físicas diferentes sino de dos métodos de cálculo.

Ejemplo 13

Hallar la fuerza sobre la lámina 1 del capacitor mostrado en la figura.

Solución

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta U)^2$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon A}{x} (\Delta U)^2$$

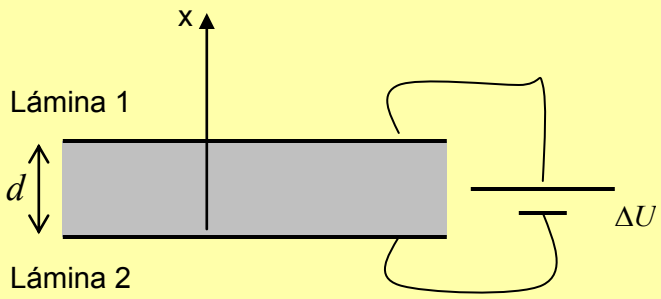


Figura 13

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \varepsilon A \left(\frac{\Delta U}{d} \right)^2 \hat{i}$$

Observar que este resultado coincide con ejemplo 13 de capítulo 5.

6.5 COEFICIENTES DE POTENCIAL

Demostraremos que si se tiene un sistema de *N* conductores con cargas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$, inmersos en medios dieléctricos l.i.h. sin cargas extrañas, entonces el potencial de cualquiera de los conductores depende linealmente de los valores de carga en la superficie de cada uno de los conductores, es decir:

$$U_i = p_{i1} Q_1 + p_{i2} Q_2 + \ldots + p_{iN} Q_N \qquad (39)$$

donde los p_{ij} son escalares constantes, llamados coeficientes de potencial.

PRUEBA: Supongamos tres conductores y que inicialmente sólo el conductor 1 está cargado, con carga Q_{10}. Los otros dos tienen carga neta nula. Llamemos $U^1(\vec{r})$ al potencial en cualquier punto $\vec{r}$.

Si variamos la carga del conductor 1 hasta un valor de λQ_{10}, el potencial en $\vec{r}$ será ahora $\lambda U^1(\vec{r})$. Efectivamente, porque si $U^1(\vec{r})$ satisface la ecuación de Laplace, $\lambda U^1(\vec{r})$ también la satisface y porque si $U(\vec{r})$ cumple las condiciones de frontera:

$$Q_1 = -\varepsilon \iint_{S_1} \vec{\nabla} U^1 \bullet \hat{n}\, da = Q_{10}$$

$$Q_2 = -\varepsilon \iint_{S_2} \vec{\nabla} U^1 \bullet \hat{n}\, da = 0$$

$$Q_3 = -\varepsilon \iint_{S_3} \vec{\nabla} U^1 \bullet \hat{n}\, da = 0,$$

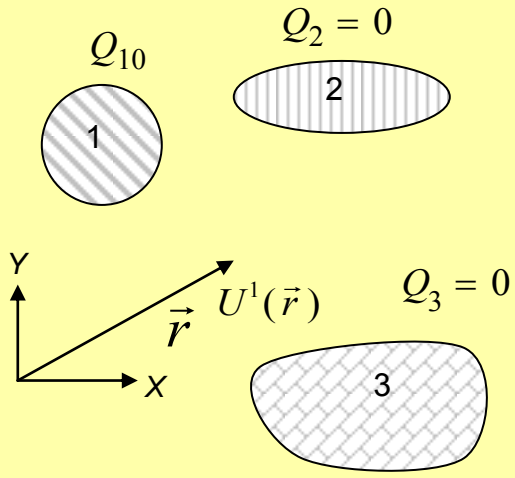


Figura 14

no es difícil comprender que $\lambda U^1(\vec{r})$ cumplirá con las condiciones:

$$Q_1 = -\varepsilon \iint_{S_1} \lambda \vec{\nabla} U^1 \bullet \hat{n}\, da = \lambda Q_{10}$$

$$Q_2 = Q_3 = -\varepsilon \iint_{S_2\, S_3} \lambda \nabla U^1 \bullet \hat{n}\, da = 0$$

Las superficies de los tres conductores son superficies equipotenciales, con valores U_1^1, U_2^1, U_3^1. Estos valores de potencial (como los valores de U^1 en cualquier punto $\vec{r}$) dependen linealmente de Q_1 y podemos escribir:

$$\begin{aligned} U_1^1 &= p_{11} Q_1 \\ U_2^1 &= p_{21} Q_1 \\ U_3^1 &= p_{31} Q_1 \end{aligned} \qquad (40)$$

Si volvemos a nuestro sistema de tres conductores (figura 14) y suponemos que sólo existe carga en el conductor 2, la cual variamos desde Q_{20} hasta $\upsilon\, Q_{20}$, entonces, es lógico que tendríamos en $\vec{r}$, un potencial que variará desde $U^2(\vec{r})$ hasta $\upsilon\, U^2(\vec{r})$ y en las superficies conductoras tendremos:

$$U_1^2 = p_{12}\, Q_2 \quad ; \quad U_2^2 = p_{22}\, Q_2 \quad ; \quad U_3^2 = p_{32}\, Q_2$$

Análogamente, podemos expresar la dependencia lineal del potencial de los conductores debido a la carga Q_3, así:

$$U_1^3 = p_{13}\, Q_3 \quad ; \quad U_2^3 = p_{23}\, Q_3 \quad ; \quad U_3^3 = p_{33}\, Q_3$$

En el caso general de que los tres conductores tengan cargas, el potencial en cualquier punto y en cualquiera de los tres conductores, puede obtenerse por el principio de superposición. Así tenemos:

$$U_1 = U_1^1 + U_1^2 + U_1^3$$

$$\begin{aligned} U_1 &= p_{11}\, Q_1 + p_{12}\, Q_2 + p_{13}\, Q_3 \\ U_2 &= p_{21}\, Q_1 + p_{22}\, Q_2 + p_{23}\, Q_3 \\ U_3 &= p_{31}\, Q_1 + p_{32}\, Q_2 + p_{33}\, Q_3 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \qquad (41)$$

En el caso más general, para un sistema de *N* conductores.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2N} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \qquad (41a)$$

Los coeficientes p_{ij} son constantes que dependen de la geometría de los conductores y de la posición relativa entre ellos. Se llaman coeficientes de potencial.

SIGNIFICADO FÍSICO De la expresión:

$$U_i = p_{i1} Q_1 + p_{i2} Q_2 + \ \cdots \ + p_{ij} Q_j + \ \cdots \ + p_{iN} Q_N$$

puede verse que; p_{ij} es el potencial en el conductor "i" debido a una unidad de carga colocada en el conductor "j".

Demostraremos ahora las siguientes propiedades de los coeficientes de potencial:

a) $p_{ij} = p_{ji}$ b) $p_{ij} \leq p_{ii}$ c) $p_{ij} > 0$

PRUEBA.- Para demostrar a) escribamos la ec. (39) en la forma:

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j \tag{42}$$

y recordando que para un sistema de *N* conductores la energía electrostática es:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i U_i$$

que se puede escribir también en la forma semidesarrollada:

$$W = \frac{Q_1}{2} \sum_{j=1}^{N} p_{1j} Q_j + \frac{Q_2}{2} \sum_{j=1}^{N} p_{2j} Q_j + \ \cdots \ + \frac{Q_N}{2} \sum_{j=1}^{N} p_{Nj} Q_j$$

Supongamos que variamos sólo Q_1 y que todas las demás Q_j permanecen constantes:

$$\frac{\partial W}{\partial Q_1} = \frac{1}{2} \left\{ 2 Q_1 p_{11} + \sum_{j=2}^{N} p_{1j} Q_j + Q_2 p_{21} + \ \cdots \ + Q_N p_{N1} \right\}$$

Entonces, el cambio de energía cuando Q_1 cambia de Q_1 a $Q_1 + dQ_1$ es:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial Q_1} dQ_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{N} p_{1j} Q_j + \sum_{j=1}^{N} p_{j1} Q_j \right\} dQ_1$$

ó

$$dW = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left(p_{1j} + p_{j1} \right) Q_j \, dQ_1 \tag{43}$$

Por otro lado, de la definición de potencial:

$$dW_b = U_1 \, dQ_1$$

y usando la ec. (42) con $i = 1$.

$$dW_b = \sum_{j=1}^{N} p_{1j} Q_j \, dQ_1 . \tag{44}$$

Comparando las ecuaciones (43) y (44) tenemos:

$$p_{1j} = \frac{1}{2} (p_{1j} + p_{j1})$$

Luego:

$$p_{1j} = p_{j1} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

Las propiedades b) y c) resultan simultáneamente recordando lo que dijimos en la sección 5 del capítulo 2 sobre las líneas de fuerza, concretamente, que los máximos de potencial sólo pueden obtenerse donde hay cargas positivas (o en el infinito). Consideremos que en el conductor 1 (figura 14) hay una unidad de carga y que en los demás la carga es nula. Es obvio que el máximo de potencial está en el conductor 1 y que éste es p_{11}, luego:

$$p_{11} > 0$$

El potencial de cualquier otro conductor, p_{j1}, está entre cero y el potencial máximo p_{11}. Por lo tanto.

$$0 < p_{j1} < p_{11}$$

Si el conductor 1 rodea totalmente al conductor j, se obtendrá la igualdad:

$$p_{11} = p_{j1}$$

Puesto que todo lo dicho para el conductor 1 puede repetirse para cualquiera de los *N* conductores, hemos ya demostrado:

$$p_{ji} \leq p_{ii} \quad \text{y} \quad p_{ji} > 0$$

Ejemplo 14

Encuéntrese el potencial de un conductor esférico de radio R, sin carga neta, en presencia de una carga puntual q ubicada a una distancia r $(r > R)$.

Solución

Consideremos a la carga puntual q distribuida en un conductor esférico de radio muy pequeño.

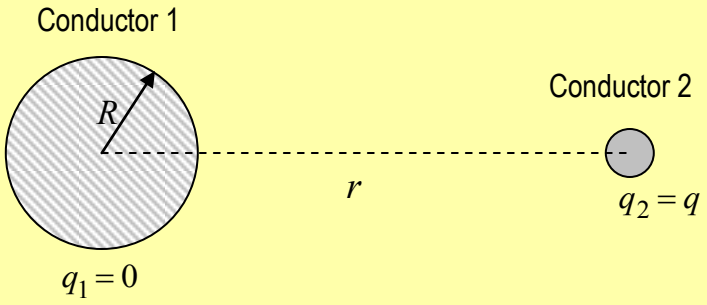


Figura 15

Aplicando la ec. (39) a este caso particular obtenemos:

$$U_1 = p_{12}\, q$$

No conocemos p_{12} pero sabemos que es igual a p_{21} y éste podemos obtenerlo teniendo en cuenta que si hay una carga Q_1 en el conductor 1 y $q = 0$ tendríamos:

$$U_2 = p_{21}\, Q_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

De aquí obtenemos:

$$p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} = p_{12}$$

Luego:

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

COEFICIENTES DE CAPACITANCIA E INDUCCION De la ec. (42) podemos obtener los valores de las cargas Q_j en función de U_j:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2N} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & C_{N3} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \tag{45}$$

donde la matriz de coeficientes C_{ij} no es otra cosa que la inversa de la matriz de coeficientes p_{ij}.

Definición: Los coeficientes C_{ii} se llaman coeficientes de capacitancia y los coeficientes C_{ij} se llaman coeficientes de inducción.

Nótese que la ecuación matricial (45) es equivalente a N ecuaciones de la forma:

$$Q_i = \sum_{i=1}^{N} C_{ij} U_j$$

ó

$$Q_i = C_{i1} U_1 + C_{i2} U_2 + \ \ldots \ + C_{ij} U_j + \ \ldots \ + C_{iN} U_N \tag{46}$$

De esta manera puede verse el significado físico de los coeficientes C_{ij} y C_{ii}: "C_{ij} es la carga en el conductor i por unidad de potencial en el conductor j". Esta interpretación puede aclararse más si el lector imagina qué sucede cuando todos los conductores están a tierra, excepto el j-ésimo que está a un voltio. Es frecuente decir que el conductor j induce una carga en el conductor i. De ahí el nombre de los coeficientes C_{ij}. El coeficiente C_{ii} es la carga en el conductor i-ésimo por unidad de potencial del mismo.

Demostraremos ahora las siguientes propiedades de los coeficientes C_{ij}.

a) $C_{ij} = C_{ji}$ b) $C_{ii} > 0$ c) $C_{ij} < 0$ d) $C_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \left| C_{ij} \right|$

PRUEBAS:

a) $C_{ij} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta} = \dfrac{\text{determinante menor adjunto}}{\text{determinante total}}$

Por otro lado, $p_{ij} = p_{ji} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{ij} = \Delta_{ji}$

Luego:

$$C_{ij} = C_{ji} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

b) Supongamos que en la figura (14) todos los conductores están a tierra, salvo el conductor 1 que está a 1 V. Este será el potencial máximo del sistema. De ahí saldrán líneas de fuerza. Su carga, C_{11}, es entonces positiva.

$$C_{11} > 0 \qquad \text{L.q.q.d.}$$

c) El potencial de todos los demás conductores es el mínimo y a ellos llegarán más líneas de fuerza de las que salen. La carga de cada uno de ellos, C_{ji}, es entonces negativa.

$$C_{ji} < 0 \qquad \text{L.q.q.d.}$$

d) El número de líneas de fuerza que salen de 1 es proporcional a C_{11} y estas líneas terminan en las cargas negativas de los otros conductores, pero algunos se van al infinito; luego:

$$C_{11} > \sum_{j=2}^{N} \left| C_{1j} \right| \qquad \text{L.q.q.d.}$$

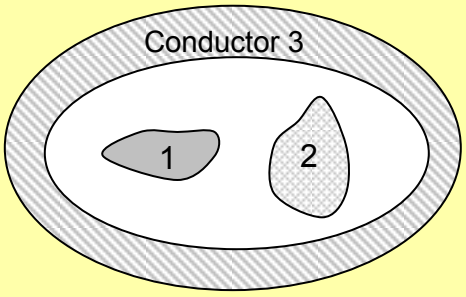


Figura 16. Para este sistema de conductores:

$$C_{11} = \left| C_{21} + C_{31} \right|$$
$$C_{22} = \left| C_{12} + C_{32} \right|$$

La igualdad se verificará solamente en el caso de que ninguna línea de fuerza vaya a infinito, es decir, cuando al conductor 1 es encerrado por alguno de los demás conductores; como por ejemplo ver figura 16.

$$C_{11} = \left| C_{21} + C_{31} \right| \quad \text{y} \quad C_{22} = \left| C_{12} + C_{32} \right|$$

COEFICIENTES DE POTENCIAL Y DE CAPACITANCIA EN UN CAPACITOR

Para un capacitor como el de la fig. (6) podemos obtener relaciones importantes entre su capacitancia y sus coeficientes C_{ij} y p_{ij}. Por ejemplo, es cierto que:

$$Q = C_{11} U_1 + C_{12} U_2$$

y como 1 está envuelto por 2: $C_{11} = -C_{12}$

Luego:

$$Q = C_{11} (U_1 - U_2) = C_{11} (\Delta U) = -C_{12} (\Delta U)$$

y

$$\frac{Q}{\Delta U} = C = C_{11} = -C_{12} = -C_{21}$$

También se puede escribir para la capacitancia:

$$C = \frac{1}{(p_{11} - p_{22})}$$

Para demostrar esto debemos partir de las expresiones:

$$U_1 = p_{11} Q - p_{12} Q$$

$$U_2 = p_{21} Q - p_{22} Q$$

y usar las propiedades de los p_{ij}.

Ejemplo 15

Un capacitor esférico está constituido por una esfera de radio a y una cáscara de radio interno b $(b > a)$ y externo c. Usando los coeficientes de potencial, encuentre la capacitancia del capacitor.

Solución

Si colocamos una carga de unidad en el conductor 2 (el externo) su potencial será:

$$p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

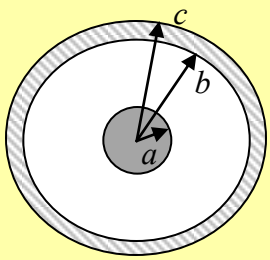


Figura 17

Si colocamos una carga unidad en el conductor 1 (el interno), su potencial será:

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} + \int_b^a - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right].$$

Luego:

$$C = \frac{1}{p_{11} - p_{22}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0\, ab}{b-a}}$$

Para un sistema arbitrario de conductores los coeficientes de potencial y los coeficientes de capacitancia se pueden hallar experimentalmente midiendo en una situación determinada las cargas y los potenciales de los conductores. Estos coeficientes así determinados pueden servir para determinar los cambios en U_{j} debido a cambios en Q_i del mismo sistema o viceversa.

En algunos sistemas sencillos podemos calcular analíticamente los coeficientes de potencial, de capacitancia y de inducción. Otras veces tendremos que determinarlos experimentalmente.

Ejemplo 16

Tres esferas conductoras están dispuestas formando un triángulo equilátero. Se ha observado que si el conductor 1 tiene una carga $Q_1 = 1{,}0\,\mu\mathrm{C}$ y los otros dos tienen carga nula, entonces Los potenciales de los conductores son $U_1 = 2{,}0\,\mathrm{V}$; $U_2 = 1{,}0\,\mathrm{V}$; $U_3 = 1{,}0\,\mathrm{V}$. ¿Cuáles serán las cargas de los conductores cuando los potenciales sean $U_1 = 4{,}0\,\mathrm{V}$; $U_2 = 5{,}0\,\mathrm{V}$; $U_3 = 6{,}0\,\mathrm{V}$?

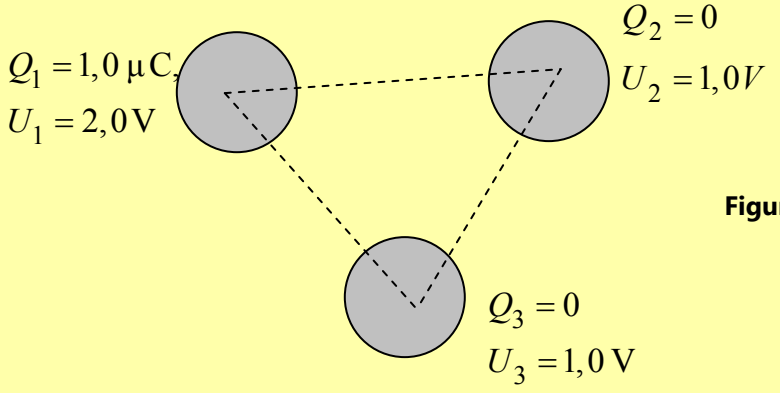


Figura 18

Solución:

Debido a la simetría del sistema puede verse a priori que: $p_{11} = p_{22} = p_{33}$ y que:

$p_{12} = p_{21} = p_{23} = p_{32} = p_{13} = p_{31}$.

De acuerdo a los datos numéricos dados, podemos decir que $p_{11} = 2 \times 10^6$ y $p_{21} = 1 \times 10^6$; luego, la matriz de coeficientes de potencial para este sistema es:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times 10^6 \text{ V/C}$$

Invirtiendo esta matriz se obtiene la matriz de los coeficientes de capacitancia e inducción:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times 10^{-6} \text{ C/V}$$

Los valores de la carga para los potenciales: 4 V, 5 V, 6 V, se obtendrá a partir de:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mu\text{C}$$

$$Q_1 = \frac{1}{4} \mu\text{C}$$

$$Q_2 = \frac{5}{4} \mu\text{C}$$

$$Q_3 = \frac{9}{4} \mu C.$$

6.6 ENERGÍA DE INTERACCIÓN

En esta sección estudiamos la energía de interacción de un sistema de cargas (discretas o continuas) con un campo externo. Por ejemplo nos interesa la energía de un sistema de cargas $\{q_{1,}q_2,\cdots\}$ en un campo externo $\vec{E}_e$, como se muestra en la figura 19. El campo $\vec{E}_e$ es producido por una distribución de cargas externas al sistema que se han omitido en la figura.

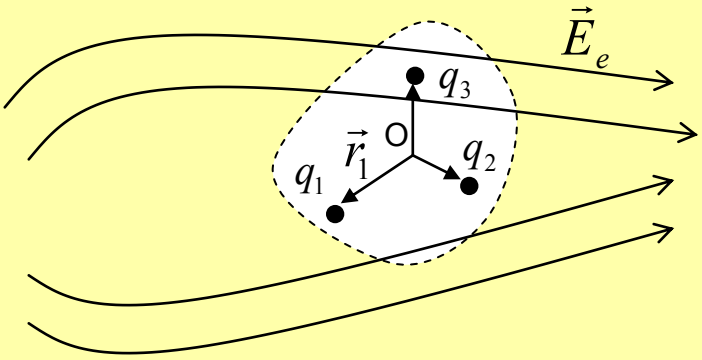


Figura 19 Interacción de un sistema de cargas con un campo externo.

Definición: Llamamos energía de interacción de un sistema de cargas $\{q_{1,}\, q_2,\cdots\}$ con un campo externo $\vec{E}_e$ al trabajo que debe hacer un agente externo para trasladar las cargas q_j desde infinito hasta sus posiciones en el sistema venciendo las fuerzas electrostáticas producidas por $\vec{E}_e$. Es decir,

$$W_{\text{int}} = \sum_j q_j\, U_e(\vec{r}_j) \tag{47}$$

NOTA: Si llamamos energía de interacción de la carga puntual q_j a la cantidad:

$$W_{\text{int}}(q_j) = q_j\, U_e(\vec{r}_j)$$

entonces, la energía de interacción del sistema es la suma de las energías de interacción de todas las cargas del sistema.

$$W_{\text{int}} = \sum_j W_{\text{int}}(q_j) \tag{47a}$$

EXPANSIÓN MULTIPOLAR DE LA ENERGÍA DE INTERACCIÓN

Consideremos que las cargas de nuestro sistema se distribuyen en una pequeña región del espacio y que las fuentes del campo externo están lo suficientemente alejadas. Podemos tomar origen de coordenadas en un punto O rodeado de las cargas $\{q_1, q_2, \cdots\}$ o muy cercano a ellas, como se muestra en la figura 19. Dicho esto, el potencial $U_e(\vec{r}_j)$ puede expandirse en una serie de Taylor:

$$U_e(\vec{r}_j) = U_e(x_j, y_j, z_j) = U_e(O) + x_j\left(\frac{\partial U_e}{\partial x}\right)_O + y_j\left(\frac{\partial U_e}{\partial y}\right)_O + z_j\left(\frac{\partial U_e}{\partial z}\right)_O +$$

$$\frac{1}{2}\left\{x_j^2\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2}\right)_O + y_j^2\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y^2}\right)_O + z_j^2\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial z^2}\right)_O + \right. \tag{48}$$

$$\left. 2x_j y_j\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x \partial y}\right)_O + 2y_j z_j\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial z}\right)_O + 2z_j x_j\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial z \partial x}\right)_O \right\}$$

Reemplazando (48) en (47) se puede ver que:

$$W_{int} = W_{mon} + W_{dip} + W_{cuad} \tag{49}$$

siendo W_{mon} la energía de interacción monopolar:

$$W_{mon} = q_{neta}\, U_e(O)\ , \tag{50}$$

W_{dip} la energía de interacción dipolar:

$$W_{dip} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(O)\ , \tag{51}$$

W_{cuad} la energía de interacción cuadrupolar (ver problema 16):

$$W_{cuad} = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{6} \left\{ (3x_j^2 - r_j^2) \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} \right)_O + 3x_j y_j \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x \partial y} \right)_O + 3x_j z_j \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial z \partial x} \right)_O + \right.$$

$$3y_j x_j \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial x} \right)_O + (3y_j^2 - r_j^2) \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y^2} \right)_O + 3y_j z_j \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial z} \right)_O + \qquad (52)$$

$$\left. 3z_j x_j \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial z \partial x} \right)_O + 3z_j y_j \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial z} \right)_O + (3z_j^2 - r_j^2) \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial z^2} \right)_O \right\}$$

que también puede escribirse como:

$$W_{cuad} = \frac{1}{6} \left\{ Q_{xx} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} \right)_O + Q_{xy} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x \partial y} \right)_O + Q_{xz} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial x \partial z} \right)_O + \right.$$

$$Q_{yx} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial x} \right)_O + Q_{yy} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y^2} \right)_O + Q_{yz} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial z} \right)_O + \qquad (53)$$

$$\left. Q_{yx} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial x} \right)_O + Q_{yy} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y^2} \right)_O + Q_{yz} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y \partial z} \right)_O \right\}$$

ó

$$W_{cuad} = -\frac{1}{6} \left\{ Q_{xx} \left(\frac{\partial E_{ex}}{\partial x} \right)_O + Q_{xy} \left(\frac{\partial E_{ex}}{\partial y} \right)_O + Q_{xz} \left(\frac{\partial E_{ex}}{\partial z} \right)_O + \right.$$

$$Q_{yx} \left(\frac{\partial E_{ey}}{\partial x} \right)_O + Q_{yy} \left(\frac{\partial E_{ey}}{\partial y} \right)_O + Q_{yz} \left(\frac{\partial E_{ey}}{\partial z} \right)_O + \qquad (54)$$

$$\left. Q_{zx} \left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial x} \right)_O + Q_{zy} \left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial y} \right)_O + Q_{zz} \left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial z} \right)_O \right\}$$

donde $Q_{zx}, Q_{xy}, \ldots Q_{zz}$ son las componentes del tensor momento cuadrupolar eléctrico (ver ecuaciones (30) del capítulo 2).

A la matriz:

$$TGCE = \vec{\nabla}\,\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

se le llama tensor gradiente de campo eléctrico, de modo que podemos sintetizar la expresión para la energía de interacción cuadrupolar como el producto directo del tensor momento cuadrupolar eléctrico por el tensor gradiente de campo eléctrico:

$$W_{cuad} = -\frac{1}{6}\,\ddot{Q} \otimes \vec{\nabla}\vec{E} \qquad (55)$$

ENERGÍA CUADRUPOLAR DE SISTEMAS CON SIMETRÍA AXIAL

Si la distribución de carga tiene simetría axial y llamando eje *Z* al eje de simetría, hemos visto en el capítulo 2 que el tensor momento cuadrupolar eléctrico puede escribirse:

$$\ddot{Q} = Q_{zz} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual la ec (54) puede simplificarse a:

$$W_{cuad} = -\frac{Q_{zz}}{6}\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_{ex}}{\partial x}\right)_O - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_{ey}}{\partial y}\right)_O + \left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial z}\right)_O \right\} \qquad (56)$$

y teniendo en cuenta que $\left(\frac{\partial E_{ex}}{\partial x}\right)_O + \left(\frac{\partial E_{ey}}{\partial y}\right)_O + \left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial z}\right)_O = 0$, obtenemos:

$$W_{cuad} = -\frac{Q_{zz}}{4}\left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial z}\right)_O = \frac{Q_{zz}}{4}\left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial z^2}\right)_O \qquad (57)$$

NOTA: El subíndice O que aparece en todas las ecuaciones de (48) a (57) se refiere a un origen tomado en (o cerca de) "el sistema". Si en un problema específico conviene tomar origen lejos de "el sistema" hay que calcular todas las cantidades en un punto $\vec{r}_0$ "representativo de el sistema".

FUERZA A PARTIR DE LA ENERGÍA DE INTERACCIÓN

La fuerza neta sobre un sistema como el de la figura 19 debida a un campo externo es:

$$\vec{F} = \sum_j q_j \vec{E}_e(\vec{r}_j) = -\sum_j q_j \vec{\nabla} U_e(\vec{r}_j)$$

Comparando con ecuación (47a)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\sum_j W_{\text{int}}(q_j) = -\vec{\nabla} W_{\text{int}}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_{mon} - \vec{\nabla} W_{dip} - \vec{\nabla} W_{cuad}$$

es decir:

$$\vec{F} = \vec{F}_{mon} + \vec{F}_{dip} + \vec{F}_{cuad}$$

donde:

$$\vec{F}_{mon} = -\vec{\nabla} W_{mon} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{mon} = q_{neta}\vec{E}_e \ ; \qquad (58)$$

$$\vec{F}_{dip} = -\vec{\nabla} W_{dip} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\vec{p}\bullet\vec{E}_e\right) \qquad (59a)$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial (10) de la sección 1.7 y que $\vec{p}$ es un vector constante, la fuerza sobre el dipolo se puede escribir también en la forma:

$$\vec{F}_{dip} = \left(\vec{p} \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{E}_e \qquad (59b)$$

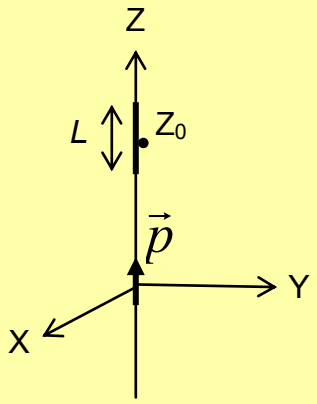
También: $$\vec{F}_{cuad} = -\vec{\nabla} W_{cuad} \qquad (60)$$

Ejemplo 17 Considere un dipolo $\vec{p} = p\,\hat{k}$ en el origen de coordenadas y una varilla de longitud *L* con carga q uniformemente distribuida y extendiéndose desde $Z_0 - L/2$ hasta $Z_0 + L/2$.

a) Calcule por integración directa la fuerza sobre la varilla.
b) Calcule las energías de interacción monopolar, dipolar y cuadrupolar de la varilla en el campo del dipolo.
c) Usando el resultado b), calcule la fuerza sobre la varilla.
d) Explique la compatibilidad de los resultados a) y c).

Solución:

En este problema, consideramos que "el sistema" es la varilla y el campo externo es producido por el dipolo. Por cálculo directo del potencial electrostático y del campo eléctrico en cualquier punto de la varilla de acuerdo con las ecuaciones (24) y (26) del capítulo 2.



$$U(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^2}\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{E}(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{z^3}\hat{k}$$

a) El valor exacto de la fuerza se calcula entonces por la integral:

$$\vec{F} = \frac{2\,p}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Z_0-L/2}^{Z_0+L/2}\frac{q}{L}\frac{dz}{z^3}$$

que resulta:

$$\vec{F} = \frac{2\,p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Z_0}{\left(Z_0^2 - \frac{L^2}{4}\right)^2}\right\}\hat{k} \qquad (*)$$

c) Teniendo en cuenta que el momento dipolar eléctrico de la varilla respecto a Z_0 es cero y de acuerdo con las ecuaciones (49), (50) y (55) , la energía de interacción de la varilla en el campo del dipolo es:

$$W_{\text{int}} = qU_e\big|_{Z_0} - \frac{1}{6}\ddot{Q}\otimes TGCE\Big|_{Z_0}$$

Pero debido a la simetría axial de la varilla podemos escribir la energía de interacción:

$$W_{\text{int}} = qU_e\big|_{Z_0} - \frac{Q_{zz}}{4}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{Z_0}$$

Teniendo en cuenta que

$$Q_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} 2\,z^2\left(\frac{q}{L}\right)dz = \frac{qL^2}{6} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z}\Big|_{Z_0} = -\frac{6p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{Z_0^4}$$

La expansión multipolar de la energía de interacción es:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{pq}{Z_0^2} + \frac{1}{4}\,\frac{pqL^2}{Z_0^4}\right\}$$

c) La aproximación multipolar para la fuerza del dipolo sobre la varilla es entonces:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2pq}{Z_0^3} + \frac{pqL^2}{Z_0^5}\right\}\hat{k} \qquad (**)$$

d) Puede verse que la fuerza calculada en al parte (c) no es exactamente igual a la calculada en la parte (a). Sin embargo, si se escribe la ecuación (*) en la forma:

$$\vec{F} = \frac{2\,p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{Z_0^3}\left\{\left(1-\frac{L^2}{4Z_0^2}\right)^{-2}\right\}\hat{k}$$

y se expande en su serie de Taylor, se obtendrán los dos primeros términos de la ec (**)

INTERACCIÓN DIPOLO-DIPOLO

Consideremos la interacción de un dipolo $\vec{p}_1$ en el origen y un dipolo $\vec{p}_2$ ubicado en $\vec{r}$. De acuerdo con la ecuación (51) podemos escribir:

$$W_{dip-dip} = -\vec{p}_2 \bullet \vec{E}_1(\vec{r})$$

donde $\vec{E}_1(\vec{r})$ es el campo producido por el dipolo $\vec{p}_1$ en la posición del dipolo $\vec{p}_2$.

Usando la ec(26) del capítulo 2.

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\ [\,\vec{p}_1 \bullet \vec{r}\,]}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3}\right\}$$

Por lo tanto la energía de interacción dipolo-dipolo viene dada por:

$$W_{dip-dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{p}_1 \bullet \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3\ (\vec{p}_1 \bullet \vec{r}\,)}{r^5}\,\vec{p}_2 \bullet \vec{r}\right\} \qquad (61)$$

La fuerza sobre el dipolo $\vec{p}_2$ es entonces:

$$\vec{F}_{dip} = -\vec{\nabla} W_{dip} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1\right) = \left(\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E}_1$$

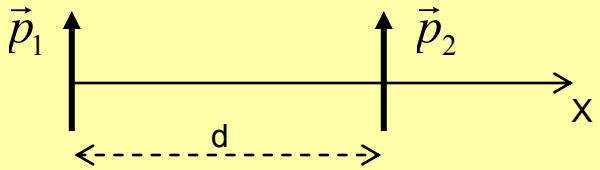
Ejemplo 18 Calcular la fuerza que

a) un dipolo $\vec{p}_1 = p_1 \hat{j}$ en el origen ejerce sobre un dipolo $\vec{p}_2 = p_2 \hat{j}$ ubicado en $(d,0,0)$.

b) un dipolo $\vec{p}_1 = p_1 \hat{j}$ en el origen ejerce sobre un dipolo $\vec{p}_2 = p_2 \hat{i}$ ubicado en $(d,0,0)$.

Solución:

a)



$$\vec{F}_{dip2} = \left(\vec{p}_2 \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{E}_1 = p_2 \frac{\partial}{\partial y}[E_{1x}\hat{i} + E_{1y}\hat{j}]$$

Por simetría podemos predecir que la fuerza va a estar a lo largo del eje *X*. Entonces, la fuerza sobre el dipolo $\vec{p}_2$ es:

$$\vec{F}_{dip2} = \left(\vec{p}_2 \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{E}_1 = p_2 \left.\frac{\partial E_{1x}}{\partial y}\right|_{(d,0)} \hat{i}$$

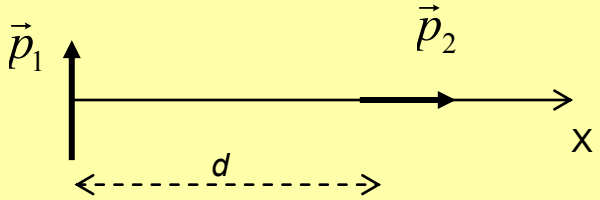
De acuerdo con ec. (26) de capítulo 2:

$$E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p_1 x y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

Luego:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p_1 p_2}{d^4}\hat{i}}$$

b)



$$\vec{F}_{dip\,2} = \left(\vec{p}_2 \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{E}_1 = p_2 \frac{\partial}{\partial x}[E_{1x}\,\hat{i} + E_{1y}\,\hat{j}]$$

Por simetría podemos predecir que la fuerza va a estar a lo largo del eje *Y*. Entonces, la fuerza sobre el dipolo $\vec{p}_2$ es:

$$\vec{F}_2 = (\vec{p}_2 \bullet \vec{\nabla})\vec{E}_{ext} = p_2 \frac{\partial E_{1y}}{\partial x}\bigg|_{(d,0)} \hat{j}$$

De acuerdo con ec. (26) de capítulo 2:

$$\vec{E}_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3p_1\,y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{p_1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right\}$$

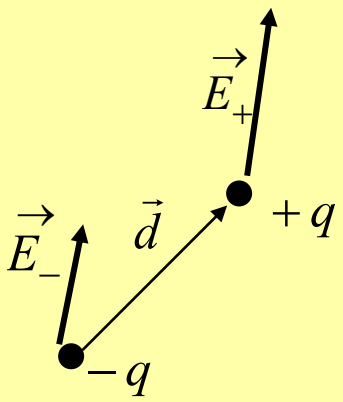
Luego:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p_1\,p_2}{d^4}\hat{j}}$$

TORQUE SOBRE UN DIPOLO

Si consideramos un dipolo como dos cargas $-q$ y q separadas por un segmento orientado $\vec{d}$ muy pequeño, siempre podemos calcular el torque de un dipolo con respecto al centro de $\vec{d}$ por la expresión:

$$\vec{\tau} = -\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_- + \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_+ = q\frac{\vec{d}}{2} \times \left(\vec{E}_+ + \vec{E}_-\right)$$



donde:

$$\vec{E}_- = \left\{\vec{E}(\vec{r}_0) - \left(\frac{\vec{d}}{2} \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{E}\bigg|_{\vec{r}_0}\right\}$$

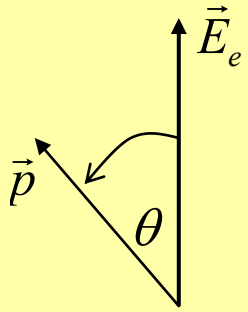
$$\vec{E}_+ = \left\{\vec{E}(\vec{r}_0) + \left(\frac{\vec{d}}{2} \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{E}\bigg|_{\vec{r}_0}\right\}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_e(\vec{r}_0)$$

$$|\vec{\tau}| = p\, E_e \,\mathrm{Sen}\theta$$

Puesto que la ec. (51) para la energía de interacción de un dipolo también se puede escribir como:

$$W_{dip} = -p\, E_e \,\mathrm{Cos}\theta \tag{62}$$



El torque también podrá escribirse como:

$$\tau = -\frac{\partial W_{dip}}{\partial \theta} = -p\, E_e \mathrm{Sen}\theta = -\left|\vec{p} \times \vec{E}_e\right| \tag{63}$$

El signo menos indica que el torque produciría una rotación en tal sentido que disminuye el ángulo θ, es decir, el torque siempre trata de alinear el dipolo eléctrico con el campo externo.

PROBLEMAS

1. Encuentre la energía de una esfera conductora de radio R y carga Q.

a) Integrando sobre la carga.

b) Integrando sobre el campo

2. Cuatro cargas puntuales iguales, de magnitud q, están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado a. ¿Cuál es la energía electrostática del sistema?

3. Se tiene una esfera dieléctrica de radio 10^{-2} m y de constante dieléctrica K_1; ésta se encuentra inmersa de un medio dieléctrico de constante K_2. Se detecta que el potencial electrostático esta dado por:

$$U(r) = \begin{cases} (10.5 - 75000\, r^2)\ \text{V} & r \le 10^{-2}\ \text{m} \\ \dfrac{0.03}{r}\ \text{V} & r > 10^{-2}\ \text{m} \end{cases}$$

donde r es la distancia al centro de la esfera con constante K_1. Hallar los valores de K_1 y K_2 de tal manera que la energía electrostática del sistema sea 10^{-10} J.

4. Hallar la energía electrostática de la siguiente distribución de carga:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{a}\right) & ;\ \text{si}\ r < a \\ 0 & ;\ \text{si}\ r > a \end{cases}$$

5. Un cilindro conductor largo de radio a esta orientado paralelamente a un plano conductor infinito. El eje del cilindro está a una distancia "h" del plano. Demuéstrese que la capacidad del sistema por unidad de longitud es

$$C_\ell = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\text{Cos h}^{-1}\,\frac{h}{a}}$$

6. Encuentre la capacitancia de los siguientes capacitores :

a) Capacitor de placas paralelas y dos capas dieléctricas como se muestra en la figura (a).

b) Capacitor esférico con dos capas dieléctricas como se muestra en la fig. (b).

c) Capacitor cilíndrico de longitud L $(L >> c)$ cuyo corte transversal puede representarse también por la fig. (b).

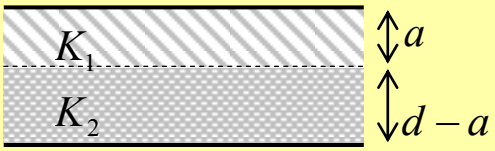


Figura a

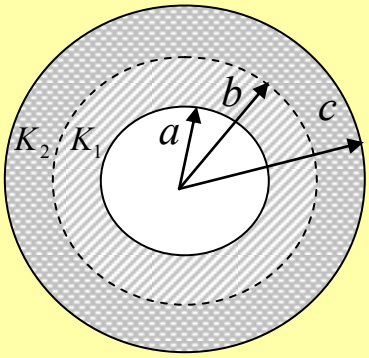


Figura b

7. Encuentre la capacitancia de los siguientes capacitores:

a) Capacitor plano semilleno con dieléctrico K.

b) Capacitor esférico semilleno con dieléctrico de constante K.

c) Capacitor cilíndrico de longitud L $(L >> c)$ cuya sección transversal puede ser también representada por fig. (b).

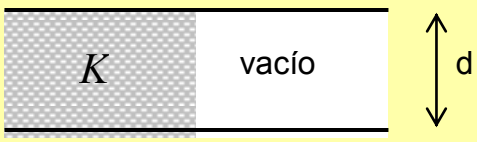


Figura a

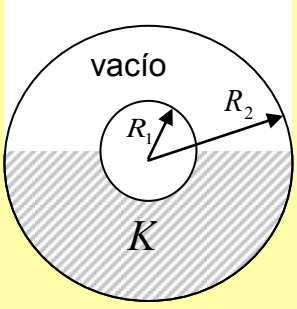


Figura b

8. Dos capacitores de aire idénticos C_1 y C_2 están conectados en serie y la combinación se mantiene a una diferencia de potencial de 20 V. Si una lámina dieléctrica de constante 5 y de espesor igual a un quinto de la brecha de aire es insertada en C_1. Calcular el voltaje a través de C_1.

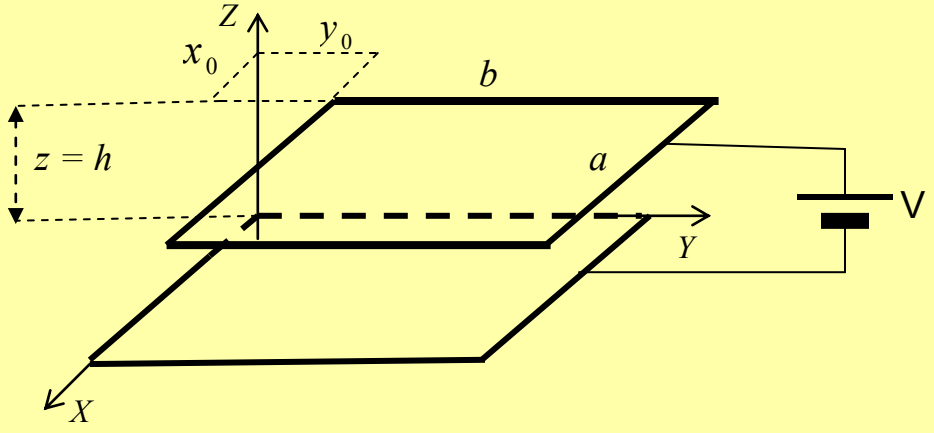
9. Dos conductores cilíndricos coaxiales muy largos, de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$ se introducen perpendicularmente en un líquido dieléctrico de susceptibilidad χ y de densidad de masa ρ. Los conductores se mantienen a la diferencia de potencial ΔU.

a) ¿A qué altura h se eleva el dieléctrico entre los conductores?

b) Repita la parte a) suponiendo $R_2 = R_1 + d$ donde $d << R_1$. No considere la tensión superficial.

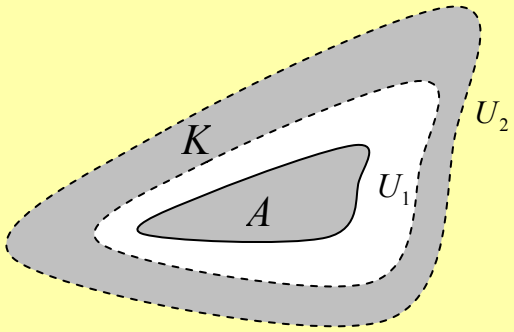
10. Dos placas conductoras fijas están separadas una distancia d. Entre ellas se coloca una tercera lámina conductora muy delgada de iguales largo y ancho que las placas. Los potenciales de las placas externas son U_1 y U_3 y el de la lámina intermedia es U_2. $(U_1 < U_2 < U_3)$. ¿Cuál debe ser la posición de la lámina intermedia para que no experimente ninguna fuerza electrostática?

11. En el capacitor de placas paralelas mostrado, la placa en el plano z = 0 es fija, pero la placa en el plano $z = h$ se ha desplazado $x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j}$. Hallar la fuerza sobre cada una de las placas, en la posición mostrada en la figura. Las dimen_ siones de las placas son a y b y están separadas una distancia h. El medio es aire.

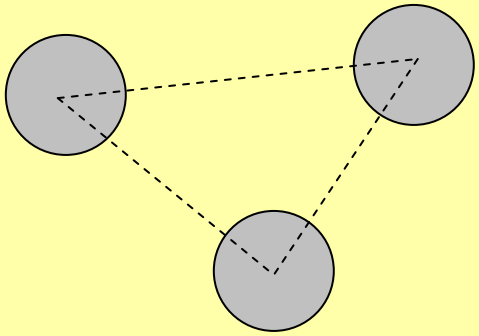


12. En la figura se muestra un conductor A de forma arbitraria con carga q y dos de las superficies equipotenciales de su campo que corresponden a los potenciales U_1 y U_2. Si el espacio entre esas superficies se llena con un dieléctrico l.i.h. de constante K. Demostrar que el cambio de energía del sistema es:

$$\Delta W = \frac{1}{2} q \left(U_1 - U_2\right)\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$



13. En la figura se muestra la sección transversal de un sistema de tres conductores cilíndricos muy largos de radio R, cuyos ejes están separados entre sí una distancia a $(a >> R)$. Hallar los coeficientes de potencial por unidad de longitud. (Tome como potencial de referencia el potencial en el gravicentro del sistema).



14 Dada dos esferas conductoras idénticas, de radio R cuyos centros están separados una distancia L. Si $L >> R$ de tal manera que cada esfera aparece respecto a la otra como carga puntual, demuestre que los coeficientes de potencial para este sistema son:

$$p_{11} = p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad p_{21} = p_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

15 Se tiene un sistema de dos objetos conductores en un medio l.i.h. El conductor 1 está descargado y el conductor 2 está a tierra. Demuéstrese que el conductor 1 también está al potencial de tierra.

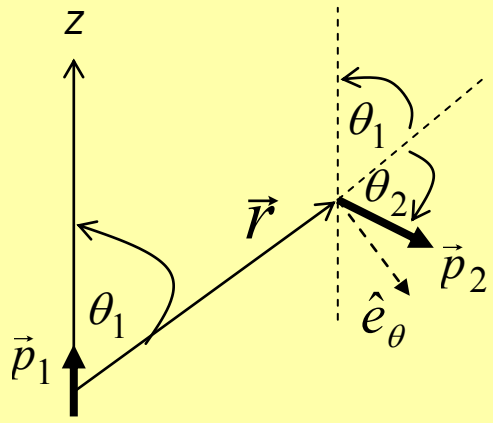
16. Obtener la ec (52) para la energía de interacción cuadrupolar a partir de la ec.(48)

17. Considere un dipolo $\vec{p} = p\,\hat{k}$ en el origen de coordenadas y un anillo de radio a con carga q uniformemente distribuida y centrado en el eje Z a una distancia Z_0 del origen. Calcule:

a) El campo eléctrico del dipolo en cualquier punto de la distribución del anillo
b) Por integración directa y usando el resultado anterior calcule la fuerza sobre el anillo.
c) Calcule las energías de interacción monopolar, dipolar y cuadrupolar del anillo en el campo del dipolo.
d) Usando el resultado c), calcule la fuerza sobre el anillo.
e) Explique la compatibilidad de los resultados b) y d).

18. Un dipolo $\vec{p}_1 = p\,\hat{k}$ está ubicado en el origen de coordenadas. Un dipolo $\vec{p}_2$ es colocado en $\vec{r}$, que hace ángulo θ_1 el eje Z. $\vec{p}_2$ está en el plano definido por el eje Z y $\vec{r}$, libre de rotar con respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro. Cuando $\vec{p}_2$ está en equilibrio hace un ángulo θ_2 con $\vec{r}$. Demostrar que la relación entre θ_1 y θ_2:

$$\mathrm{Tan}\,\theta_1 = 2\,\mathrm{Tan}\,\theta_2$$



CAPITULO 7

CORRIENTES ESTACIONARIAS

7.1 CORRIENTE Y DENSIDADES DE CORRIENTE

Consideremos una región del espacio $(\Re)$, vacía u ocupada por un trozo de material conductor, en la cual existen partículas cargadas en movimiento (portadores).

Definición: Si se observa que a través de una superficie S pasa una carga ΔQ en el intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$ diremos que la corriente eléctrica promedio a través de dicho intervalo es:

$$I_{prom} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{1}$$

(S puede ser la sección transversal de un alambre conductor, por ejemplo, o cualquier superficie en el espacio vacío por donde pasen cargas en movimiento).
Si el paso de la carga a través de S no es constante I_{prom} variará al variar el intervalo $(t, t+\Delta t)$; pero si tomamos el límite en que Δt tiende a cero, para cada instante t queda bien definida la cantidad:

$$I(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \tag{2}$$

Nos interesa en este capítulo sólo las corrientes en que I no depende del tiempo. Para éstas se tiene $I_{prom} = I$.
Cuando los portadores de carga se desplazan en un medio estático se dice que estamos frente a una **Corriente de Conducción.** Este es el caso de la corriente eléctrica en metales y en soluciones electrolíticas.

Cuando los portadores de carga se mueven junto con el medio se dice que la corriente es de **Convección.** Este el caso de cuerpos aislantes cargados electros_

táticamente que se desplazan como en un generador Van der Graaff o que giran respecto a un eje fijo. También son corrientes de convección las corrientes atmosféricas que se producen en las tormentas.

Una corriente eléctrica debida a portadores de carga positivos que se mueven en un sentido tiene los mismos efectos que una corriente debido a portadores negativos que se mueven en sentido contrario. El sentido de la corriente, establecido convencionalmente, es aquel en que se mueven (o se moverían) los portadores positivos.

DENSIDADES DE CORRIENTE Consideremos una superficie S a través de la cual pasa una corriente eléctrica I. Por un elemento diferencial de área $da\,\hat{n}$ (ver figura 1) de esta superficie fluye una corriente dI, la cual se puede expresar en función de los siguientes parámetros:

N = N° de portadores por unidad de volumen

q = carga de cada portador

$\vec{\mathrm{v}}$ = velocidad promedio de los portadores o velocidad de arrastre.

Los portadores que pasan a través del elemento $\hat{n}\,da$ durante el intervalo $(t\,,\,t+\Delta t)$ son los que en el instante t están

en el paralepípedo de base da y altura $\Delta t\,\vec{\mathrm{v}}\,.\,\hat{n}$; es decir:

N° de portadores = $N\vec{\mathrm{v}}\bullet\hat{n}\,da\,\Delta t$

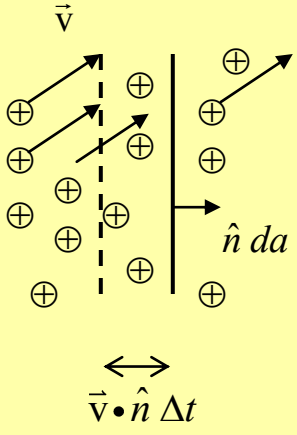


Figura 1

La carga que pasa a través del elemento de área es:

$$\Delta Q = Nq\vec{\mathrm{v}}\bullet\hat{n}\,da\,\Delta t$$

y la corriente eléctrica a través de $\hat{n}\,da$ es:

$$dI = Nq\vec{\mathrm{v}}\bullet\hat{n}\,da \qquad (3)$$

Definición: Se llama vector ***Densidad de Corriente*** o densidad volumétrica de corriente a la cantidad:

$$\vec{J} = n\,q\,\vec{\mathrm{v}} \tag{4}$$

Con esta definición la ec. (3) puede escribirse:

$$dI = \vec{J} \bullet d\vec{a} \tag{5}$$

Nótese que estamos llamando densidad volumétrica de corriente a una cantidad que tiene unidades de corriente por unidad de área.

Si la corriente es de convección, es decir, debida a que un medio cargado con densidad volumétrica de carga ρ se mueve con velocidad $\vec{\mathrm{v}}$, entonces en cada punto del medio se tendrá que la densidad de corriente (ec.4) es:

$$\vec{J} = \rho\vec{\mathrm{v}} \tag{4a}$$

CORRIENTES SUPERFICIALES Cuando el movimiento de cargas se produce en superficies conductoras, planas o alabeadas, la corriente eléctrica viene a ser la carga por unidad de tiempo que pasa a través de un segmento de arco o de recta.

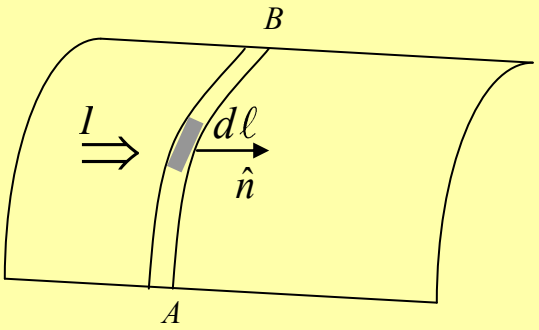


Fig. 2. Corriente superficial: La corriente eléctrica I es la carga que pasa a través del segmento AB en la unidad de tiempo.

En este caso no es posible hablar de densidad volumétrica de corriente (corriente por unidad de área); pero sí es posible como lo hacemos a continuación, definir densidad superficial de corriente que viene a ser corriente por unidad de longitud.

Por un segmento de longitud $d\ell$ del arco AB (ver figura 2) pasa una corriente dI que se puede expresar en función de los parámetros:

P = N° de portadores por unidad de superficie.

q = carga de cada portador.

$\vec{\mathrm{v}}$ = velocidad de arrastre.

Los portadores que pasan a través del segmento $d\ell$ en el intervalo $\left(t\,,\,t+\Delta t\right)$ son aquellos que en el instante t se encuentran dentro del paralelogramo de lados $d\ell$ y $\vec{\mathrm{v}}\bullet\hat{n}\,\Delta t$. Siendo $\hat{n}$ un vector unitario en la dirección perpendicular al segmento de longitud $d\ell$. La carga que pasa a través de dicho segmento es entonces:

$$\Delta Q \;=\; P\,q\,\vec{\mathrm{v}}\bullet\hat{n}\,d\ell\,\Delta t$$

y la corriente eléctrica a través del mismo:

$$dI \;=\; P\,q\,\vec{\mathrm{v}}\bullet\hat{n}\,d\ell \qquad (6)$$

Definición: Se llama vector **Densidad de corriente superficial** a la cantidad:

$$\vec{K} \;=\; P\,q\,\vec{\mathrm{v}} \qquad (7)$$

Con esta definición la ec. (5) puede escribirse así:

$$dI \;=\; \vec{K}\bullet\hat{n}\,d\ell \qquad (8)$$

Para corrientes de convección la ec. (7) puede escribirse así:

$$\vec{K} \;=\; \sigma\,\vec{\mathrm{v}} \qquad (7a)$$

7.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

De acuerdo con la ec. (5) la corriente a través de una superficie finita S viene a ser el flujo del vector $\vec{J}$ a través de S o sea:

$$I = \iint_S \vec{J} \bullet d\vec{a} \tag{9}$$

Definición: Se dice que una corriente es corriente estacionaria cuando el vector $\vec{J}$ es constante (en el tiempo) en todos los puntos del espacio.

Por reducción al absurdo, mostramos a continuación que la definición dada de corriente estacionaria es equivalente a:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \tag{10}$$

PRUEBA: La ecuación (9) para una superficie cerrada es:

$$I = \oiint_S \vec{J} \bullet d\vec{a} \tag{9a}$$

Supongamos que en el volumen V encerrado por S existe en el instante t_0 una carga Q_0. Si $I > 0$ (sale carga neta) entonces en algún instante posterior t_1 la carga encerrada será cero y ya no podrá salir más carga a través de S; luego $\vec{J}(t_1) \neq \vec{J}(t_0)$. Esto significa que es incompatible el concepto de corriente estacionaria con flujo no nulo a través de una superficie cerrada y por lo tanto, para corrientes estacionarias debe tenerse siempre:

$$I = \oiint_S \vec{J} \bullet d\vec{a} = 0 \tag{10a}$$

siendo S cualquier superficie cerrada.

Por el teorema de la divergencia la afirmación anterior es equivalente a la ec. (10)

En casos de corrientes no estacionarias, $\vec{J}$ varía con el tiempo y la rapidez con que aumenta la carga en el volumen V es:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\,(x,y,z,t)\,dV \;=\; -\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{a} \tag{11}$$

Aplicando la regla de Leibnitz al primer miembro y el teorema de la divergencia al segundo miembro tenemos:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV \;=\; -\iiint_V \operatorname{div}\vec{J}\;dV \tag{12}$$

Puesto que esta ecuación es válida para cualquier volumen V, tendremos:

$$\operatorname{div}\vec{J} \;+\; \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0 \tag{13}$$

que se conoce como la **ecuación de continuidad** y no es otra cosa que una expresión para la conservación de la carga.

NOTA: En los casos de corrientes superficiales:

$$I \;=\; \oint_C \vec{K}\bullet \hat{n}\,d\ell$$

es cero para corrientes estacionarias. Y

$$\oint_C \vec{K}\bullet \hat{n}\,d\ell \;=\; -\frac{d}{dt}\iint_S \sigma\,da \tag{*}$$

para corrientes no estacionarias.

Considerando que la superficie es en realidad una lámina con espesor uniforme h

Si multiplicamos y dividimos por h ambos miembros de la ec (*) , vemos que ésta es la misma que la ec. (11) y que:

$$\vec{K} \;=\; h\,\vec{J} \qquad \text{y} \qquad \sigma \;=\; \rho\,h$$

La ecuación de continuidad en el caso de corrientes superficiales es entonces:

$$\operatorname{div}\vec{K} \;+\; \frac{\partial \sigma}{\partial t} \;=\; 0 \tag{14}$$

7.3 LEY DE OHM Y CONDUCTIVIDAD

En un conductor los electrones libres se mueven con velocidades de distintos valores, desde cero hasta 10^6 m/s y en direcciones al azar. La velocidad promedio de los electrones es nula.

Cuando entre dos puntos o dos superficies del conductor se establece una diferencia de potencial, en el interior del conductor aparece un campo eléctrico y se producirá desplazamiento neto de electrones. Digamos que ahora la velocidad promedio de los portadores es $\vec{v}$. Entonces:

$$\vec{J} = Nq\vec{v} \tag{4}$$

Según el modelo de Drude-Lorentz, se puede establecer una relación sencilla entre $\vec{v}$ y el campo eléctrico establecido en el interior del conductor.

Un portador debido a $\vec{E}$ adquiere una aceleración:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

pero al chocar con los átomos de la red, el electrón es desviado en dirección al azar. En promedio el efecto de cada choque es regresar la velocidad del electrón a cero. Si el tiempo promedio entre dos choques es τ, entonces la velocidad promedio del electrón entre cada par de choques es:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} a\,\tau = \frac{1}{2}\frac{q\,\tau}{m}\vec{E} \tag{15}$$

Esta es la que hemos llamado velocidad de arrastre de los portadores.

Reemplazando la ec. (15) en la ec. (4) se obtiene:

$$\vec{J} = \frac{N\,q^2\,\tau}{2\,m}\vec{E} \tag{16}$$

Definición: A la constante:

$$g = \frac{N q^2 \tau}{2m}$$

se le llama conductividad eléctrica del material.
La ecuación (16) se escribe habitualmente:

$$\vec{J} = g \vec{E} \tag{17}$$

NOTA: En realidad g es un escalar constante sólo para cierto tipo de materiales, llamados **óhmicos** o conductores **lineales, isotrópicos** y **homogéneos.** En general la relación entre $\vec{J}$ y $\vec{E}$ es:

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{g} \vec{E} \tag{17a}$$

donde $\overleftrightarrow{g}$ es una cantidad tensorial que puede depender del módulo de $\vec{E}$, de la dirección de $\vec{E}$ y de la posición dentro del material.

Cuando el material satisface la ec. (17) con g escalar constante se dice que obedece la ley de Ohm. A partir de la ec. (17) puede obtenerse la siguiente:

$$I = \frac{\Delta U}{R} \tag{18}$$

que es la manera más común de expresar la ley de Ohm (macroscópica).

Para pasar de (17) a (18) se considera una pequeña porción cilíndrica de material conductor, de longitud ℓ y sección transversal A.

En este caso:

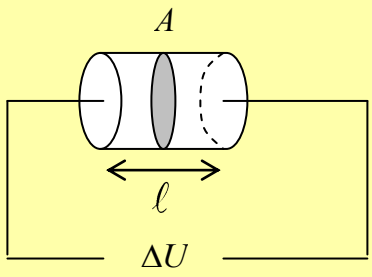
$$E = \frac{\Delta U}{\ell} \tag{19}$$

y

$$J = \frac{I}{A} \tag{20}$$

Reemplazando (19) y (20) en (17):

$$I = \frac{(\Delta U)A}{\eta \ell} \qquad (21)$$



donde $\eta = g^{-1}$ se llama **resistividad** del material.

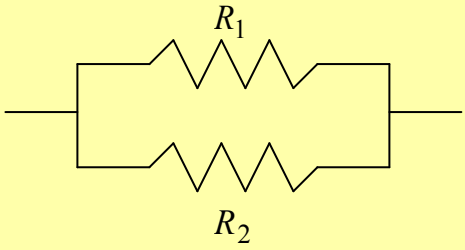
A la cantidad:

$$R = \frac{\eta \ell}{A}$$

se le llama resistencia del trozo de material en estudio. Cabe insistir que a la ec. (18) (ó (21)) se le llama ley de Ohm, sólo si R es constante. Esto ocurre precisamente cuando g es escalar constante.

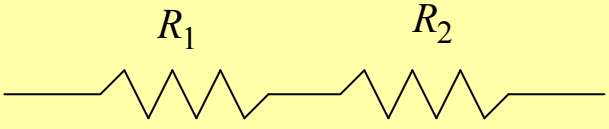
Es habitual representar en los circuitos de corriente a un trozo de material con resistencia R por el símbolo:

Dos resistencias en paralelo pueden ser reemplazadas por una resistencia equivalente:



$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Dos resistencias en serie pueden ser reemplazadas por una resistencia equivalente:



$$R = R_1 + R_2$$

7.4 FUERZA ELECTROMOTRIZ (FEM)

En el capitulo II hemos visto que la circulación del campo electrostático a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es nula.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \qquad (22)$$

Combinando esta ecuación con:

$$\vec{J} = g\vec{E}$$

tendríamos que para cualquier circuito cerrado la circulación de $\vec{J}$ es también nula.

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = 0 \qquad (22a)$$

Pero si observamos la fig. (4)

vemos que $\vec{J}$ y $d\vec{\ell}$ son siempre paralelos y por lo tanto:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{\ell} > 0 \qquad (23)$$

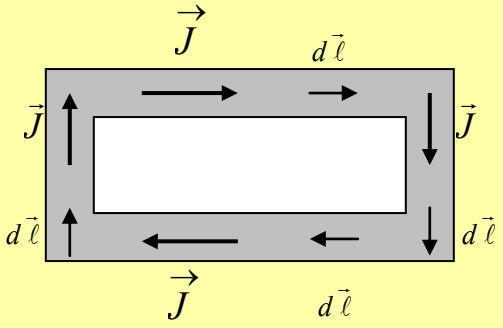


Figura 4: Esquema de un circuito arbitrario de corriente estacionaria

La contradicción entre las ecs. (22a) y (23) se explica admitiendo que físicamente es imposible establecer un circuito de corriente estacionaria con únicamente fuerzas electrostáticas. Cuando hay un circuito de corriente estacionaria, sobre los portadores de carga actúa un campo eléctrico efectivo:

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E}_s + \vec{E}_m \qquad (24)$$

donde $\vec{E}_s$ es un campo electrostático, es decir, de la forma:

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

y $\vec{E}_m$, que lo llamaremos **Campo Electromotriz**, es la fuerza no electrostática por unidad de carga que actúa sobre cada portador. Esta fuerza no electrostática puede ser originada por variaciones del flujo magnético (ley de Faraday) o por las propiedades químicas de la sustancias que constituyen una pila o batería.

Definición: Se llama fuerza electromotriz de un circuito al trabajo que hace el campo electromotriz para llevar a la unidad de carga a lo largo de todo el circuito.

$$\xi = \oint \vec{E}_m \bullet d\vec{\ell} \tag{25}$$

De acuerdo con las ecs. (19) y (21) se tendrá:

$$\xi = \oint (\vec{E}_s + \vec{E}_m) \bullet d\vec{\ell} = \oint \vec{E}_{ef} \bullet d\vec{\ell} \tag{26}$$

En algunos casos puede existir campo electromotriz a lo largo de todo el circuito (es el caso de $\vec{E}_m$ debido a variaciones de un campo magnético). En otros casos sólo existe campo electromotriz en una pequeña región del circuito (la región ocupada por una pila o batería).

La figura (5) y las ecs. (27) y (28) muestran como la fuerza electromotriz (trabajo hecho por la batería sobre unidad de carga) es igual a la diferencia de potencial $U_B - U_A$ (trabajo hecho contra el campo electrostático para llevar la unidad de carga desde B hasta A).

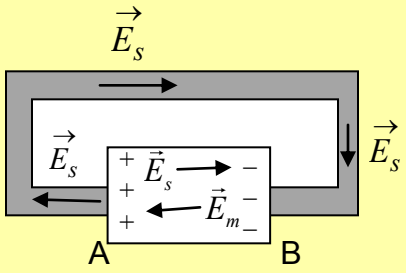


Fig. 5 Circuito arbitrario: Sólo hay $\vec{E}_m$ en la batería

$$\xi = \int_A^B \vec{E}_m \bullet d\vec{\ell} \tag{27}$$

$$\int_A^B \vec{E}_m \bullet d\vec{\ell} = \int_A^B -\vec{E}_s \bullet d\vec{\ell} = U_B - U_A \tag{28}$$

7.5 CORRIENTES EN MEDIOS SIN FUENTES DE FEM

Como se ha dicho en la sección anterior, en los circuitos donde la corriente eléctrica se debe a pilas o baterías, sólo existe campo electromotriz en la región ocupada por dichos elementos. En cualquier otro punto del circuito se tiene $\vec{E}_m = 0$ y

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E}_s = \vec{E}$$

es un campo electrostático que puede derivarse del campo escalar potencial electrostático:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \tag{29}$$

Además, para corrientes estacionarias sabemos que:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

y si el medio es óhmico, tendremos:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \tag{30}$$

Las ecs. (29) y (30) indican que el potencial electrostático, en cualquier región donde haya corriente estacionaria y no haya fuentes de fuerza electromotriz, satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 U = 0 \tag{31}$$

Para regiones con corriente estacionaria y sin fuentes de f.e.m. podemos entonces encontrar el potencial en cualquier punto, si se conociera el potencial o su derivada normal en la frontera. Los métodos a usar son exactamente los mismos que los estudiados en los capítulos III, IV y V.

Si se tiene una interface entre dos medios de conductividades g_1 y g_2 se verifica la condición de frontera:

$$U_1 = U_2 \qquad (\text{ ó } \quad E_{1t} = E_{2t}) \tag{32}$$

Podemos ahora obtener una condición de frontera para la componente normal de $\vec{J}$.

El flujo de $\vec{J}$ a través de la pequeña superficie cilíndrica mostrada en la fig. (6) es cero, de acuerdo con la ecuación (10).

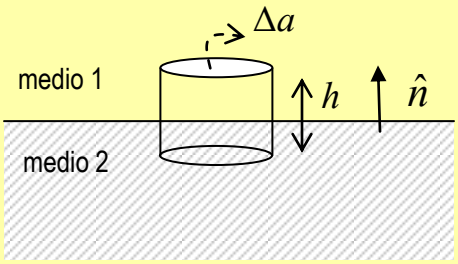


Figura 6

Y si $h \to 0$:

$$\oiint_S \vec{J} \bullet da = \vec{J}_1 \bullet (\hat{n}\,\Delta a) + \vec{J}_2 \bullet (-\hat{n}\,\Delta a).$$

Luego:

$$J_{1n} = J_{2n} \qquad (33)$$

Las condiciones de frontera (32) y (33) son análogas a las ecs. (32), (34) y (35) del capitulo V. Con ayuda de éstas y de las condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann podemos encontrar el potencial electrostático en diferentes situaciones y luego el campo eléctrico, $\vec{E}$, la densidad de corriente, $\vec{J}$, la corriente, I, y la resistencia de cada medio.

Ejemplo 1

Dos cáscaras esféricas metálicas (conductividad g muy grande) concéntricas de radios a y c $(a < c)$ se mantienen a los potenciales U_a y U_c respectivamente. Entre ellas se colocan dos materiales de conductividades g_1 (en la región $a < r < b$) y g_2 (en la región $b < r < c$). Ambos g_1 y g_2 son muchos menores que g.

a) Hallar el potencial electrostático en cualquier punto de la región $a < r < c$.

b) Hallar la resistencia del sistema.

Solución

El potencial U no depende de las coordenadas angulares y

$$U_1(r) = \frac{A_1}{r} + B_1 \qquad \text{Para} \quad a < r < b$$

y $U_2(r) = \frac{A_2}{r} + B_2$ Para $b < r < c$

Las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2 se encuentran a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$U_a = \frac{A_1}{a} + B_1 \qquad U_c = \frac{A_2}{c} + B_2$$

$$\frac{A_1}{b} + B_1 = \frac{A_2}{b} + B_2 \qquad \text{(continuidad de } U \text{ en } b\text{)}$$

$$g_1 A_1 = g_2 A_2 \qquad \text{(continuidad de } J_n \text{ en } b\text{)}$$

Los valores de las constantes que encontramos son:

$$A_1 = \frac{(U_c - U_a)\, g_2}{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)} U$$

$$A_2 = \frac{(U_c - U_a)\, g_1}{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$B_1 = U_a - \frac{A_1}{a} \quad ; \quad B_2 = U_c - \frac{A_2}{c}$$

Las expresiones para el potencial electrostático son entonces:

$$U_1(r) = \frac{(U_c - U_a)\, g_2}{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + U_a$$

$$U_2(r) = \frac{(U_c - U_a)\, g_1}{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c}\right) + U_c$$

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{E}_1 = \frac{A_1}{r^2}\hat{e}_r \quad \text{y} \quad \vec{J}_1 = \frac{g_1 A_1}{r^2}\hat{e}_r$$

encontramos que la corriente a través de cualquier superficie esférica concéntrica con las metálicas es:

$$I = \frac{4\pi g_1 g_2 (U_c - U_a)}{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}$$

La resistencia es entonces:

$$R = \frac{(U_c - U_a)}{I} = \frac{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}{4\pi\, g_1\, g_2}$$

NOTA 1: El hecho de que $g >> g_1$ y $g >> g_2$ nos garantiza que las esferas metálicas son equipotenciales porque si g es muy grande se necesita un campo muy pequeño para producir K finita en el metal y si $\vec{E}$ es pequeño entonces: $\int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \approx 0$ entre dos puntos cualesquiera de una misma superficie metálica.

NOTA 2: Los medios de conductividades g_1 y g_2 pueden ser, por ejemplo, soluciones electrolíticas, es decir, sales que se disuelven en un líquido dieléctrico. Podemos tener entonces permitividades ε_1 y ε_2 para los diferentes medios. Si este es el caso tendríamos una discontinuidad de D_n en la interface entre dos medios.

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{(U_c - U_a)(\varepsilon_1 g_2 - \varepsilon_2 g_2)}{g_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + g_1\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)} \frac{1}{b^2}$$

Esta es la densidad superficial de carga que se acumula en la superficie $r = b$ cuando se establece el flujo estacionario de cargas.

RELACIÓN ENTRE R Y C

Si consideramos que el sistema de la fig. (7) es un capacitor y que entre los conductores a potenciales U_1 y U_2 hay un dieléctrico de permitividad ε; podemos escribir según la ecuación (21) del capitulo VI:

$$C = \frac{\varepsilon \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}} \qquad (34)$$

donde S es cualquier superficie cerrada que encierra al conductor 1.

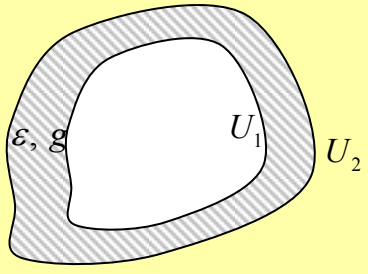


Figura 7

Podemos reemplazar la substancia dieléctrica entre las placas por un material de conductividad g. De acuerdo con las expresiones:

$$R = \frac{\Delta U}{I} \quad ; \quad \Delta U = \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{\ell} \quad ; \quad I = \oiint_S g\vec{E} \bullet d\vec{a}$$

tendremos:

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{\ell}}{g \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a}} \tag{35}$$

Multiplicando miembro a miembro a las ecs. (34) y (35) tenemos:

$$\boxed{R\,C = \frac{\varepsilon}{g}} \tag{36}$$

La utilidad de la ec. (36) puede comprenderse con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Se tiene un cilindro metálico de longitud infinita y de radio a, cuyo eje es paralelo y está a una distancia h de una lámina metálica infinita (la conductividad g_m de ambos es muy grande). Todo el semiespacio entre plano y cilindro se llena con un medio de conductividad g $(g << g_m)$.

Encontrar la resistencia por unidad de longitud a la corriente entre ambos elec_ trodos.

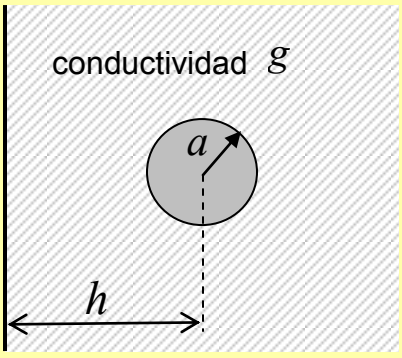
Solución

De acuerdo con el problema (5) del capitulo VI tenemos:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\text{Cosh}^{-1}\frac{h}{a}}$$

Usando la ec. (36) tenemos inmediatamente:

$$R = \frac{\text{Cosh}^{-1}\frac{h}{a}}{2\pi g}$$



ELECTROSTÁTICA Y CORRIENTES ESTACIONARIAS

Si se tiene un medio de conductividad muy pequeña comparada con la de los metales, cualquier electrodo metálico que sea introducido en dicho medio será una superficie equipotencial. Supongamos que U_1 y U_2 son los potenciales de electrodos de la fig. (9). Podemos variar la resistencia R_1 hasta que por el galvanómetro G no pase corriente. En ese instante conocemos el potencial en el punto P y así podemos hacerlo para todos los puntos del sistema.

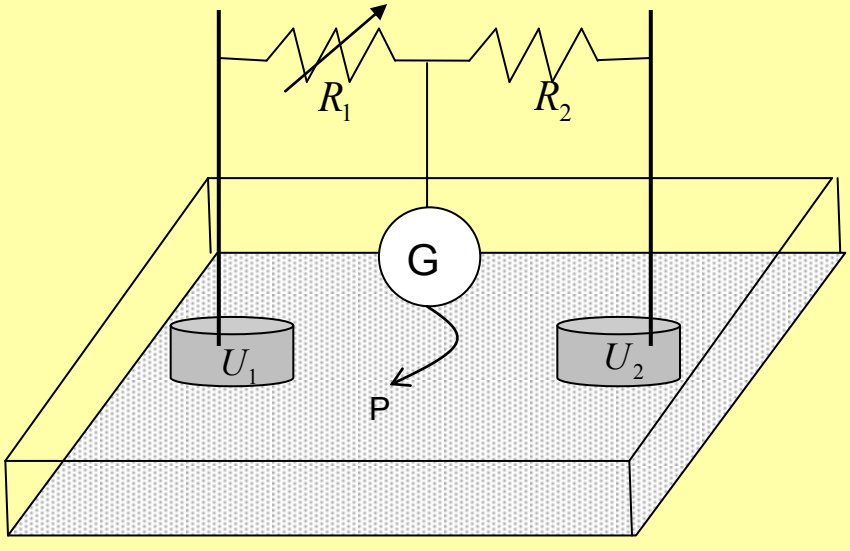
$$U\,(P) = U_1 - R_1 I = U_2 + R_2 I$$

$$U(P) = U_1 - (U_1 - U_2)\frac{R_1}{\left(R_1 + R_2\right)}$$

La solución para el potencial en el sistema de corrientes estacionarias que acabamos de encontrar es exactamente la misma que para un sistema electrostático con conductores a potenciales U_1 y U_2 y con medios dieléctricos (o vacío) en lugar del medio de conductividad g.

Es decir, es posible resolver experimentalmente problemas electrostáticos montando experimentos equivalentes de sistemas de corrientes estacionarias.

Ahora el estudiante comprenderá porque en el laboratorio de Física General sobre Curvas Equipotenciales trabajó con sistemas de corrientes estacionarias para resolver el problema de hallar curvas equipotenciales electrostáticas.



PROBLEMAS

1. En un instante dado, un cierto sistema tiene una densidad corriente descrita en el SI de unidades por la expresión:

$$\vec{J} = A\left(x^3\,\hat{i} + y^3\,\hat{j} + z^3\,\hat{k}\right)$$

donde A es una constante positiva.

a) ¿Cuáles son las unidades de A?

b) En este instante ¿Cuál es la rapidez de cambio de la densidad de carga en el punto (2,-1,4) metros?

c) Considerar la carga total Q contenida dentro de una esfera de radio a con centro en el origen. En el mismo instante ¿Cuál es la rapidez con que está cambiando Q ?

2. Una carga total Q se distribuye uniformemente en el volumen de una esfera de radio a. La esfera se hace rotar luego con velocidad angular constante ω respecto a un diámetro. Asumiendo que la distribución de carga no es afectada por la rotación, encontrar $\vec{J}$ en cualquier punto de la esfera. (Exprésela en coordenadas esféricas con el eje polar coincidiendo con el eje de rotación). Encontrar la corriente total que pasa a través de un semicírculo de radio a fijo en el espacio, con su base en el eje de rotación.

3. Una esfera dieléctrica de radio a está uniformemente polarizada. Se hace rotar con velocidad angular ω, constante, alrededor del diámetro paralelo a $\vec{P}$. Asumiendo que $\vec{P}$ no es afectado por la rotación, encontrar las densidades de corriente. Grafique su resultado como una función de la(s) coordenada(s) apropiada(s). Encontrar la corriente total que pasa a través de un semicírculo de radio a fijo en el espacio, con su base en el eje de rotación.

4. Una esfera de radio a centrada en el origen esta hecha de un material óhmico de conductividad g. El potencial en la superficie es mantenida a los valores expresados en coordenadas esféricas por:

$$U = U_0 \cos\theta$$

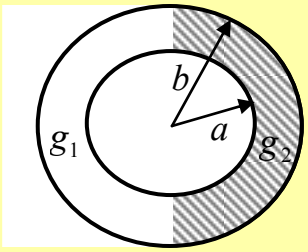
Encontrar la densidad de corriente en cualquier punto en el interior de la esfera.

5. Dos placas paralelas, planas, infinitas, de metal, están separadas una distancia d. El espacio entre las placas se llena con dos medios conductores, siendo la superficie de separación entre ambos medios un plano paralelo a las placas metálicas. El primer medio (conductividad g_1, permitividad ε_1) es de espesor a, y el segundo (conductividad g_2, permitividad ε_2) tiene espesor $(d-a)$. Las placas metálicas se mantienen a los potenciales U_1 y U_2, respectivamente. En el estado estacionario, ¿Cuál es el potencial de la superficie de separación de los medios? y, ¿Cuál es la densidad superficial de carga libre en esta superficie de separación?

6. Dos largas cáscaras cilíndricas de metal; radios a y b, $(b > a)$ se disponen coaxialmente. Las placas se mantienen a la diferencia de potencial ΔU.
   a) Si la región entre las cáscaras se llena con un medio de conductividad g, halle la resistencia por unidad de longitud del sistema.
   b) Si la región entre las cáscaras se llena con un medio aislante de permitividad ε, halle la capacidad por unidad de longitud del sistema.
   c) Verifique que el producto de los resultados anteriores es $\frac{\varepsilon}{g}$.

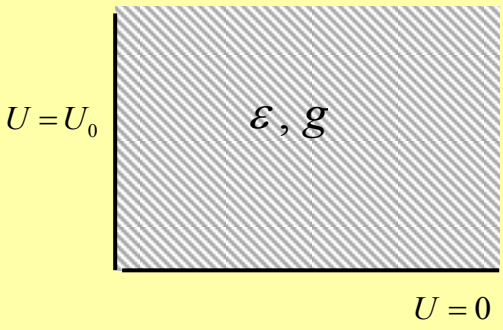
7. Dos largas cáscaras cilíndricas metálicas (radios a y c, con $c > a$) se disponen coaxialmente. Las placas se mantienen a la diferencia de potencial ΔU. En la región $a < r < b$ se coloca un material de conductividad g_1 y permitividad ε_1, y en la región $b < r < c$ un medio de conductividad g_2 y permitividad ε_2. Halle la densidad superficial de carga libre en $r = b$.

8. Entre dos cáscaras esféricas metálicas de radios a y b $(b>a)$ se colocan dos medios de conductividades g_1 y g_2 como se muestra en la figura. Hallar la resistencia a la corriente entre las esferas metálicas.

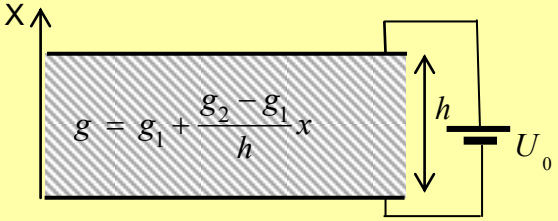


9. Dos cilíndricos conductores de radio a y de longitud infinita están dispuestos como se ilustra en la figura. Hallar la resistencia por unidad de longitud a la corriente entre ambos electrodos.

10. Dos electrodos planos semiinfinitos están dispuestos como se ilustra en la figura. Entre ellos existe un medio de conductividad g. Si la diferencia de potencial entre los electrodos es U_0. Se pide hallar:
    a) El vector de densidad de corriente en cualquier punto del medio de conductividad g.
    b) El valor de σ en cualquier punto de la armadura conectada a Tierra.



11. Dos electrodos de área A están en contacto con un bloque de material conductor en el cual la conductividad varía linealmente de g_1 en una placa a g_2 en la otra. Si se conecta una batería como se muestra en la figura, calcular: a) El campo eléctrico, b) la densidad de corriente; c) la corriente total entre los electrodos.



12. Se tiene dos medios, de conductividad infinita uno (conductor perfecto) y el otro de conductividad g y permitividad ε. Si en estado estacionario a través de la interface hay una corriente:

$$\vec{J} = J\,\hat{n}$$

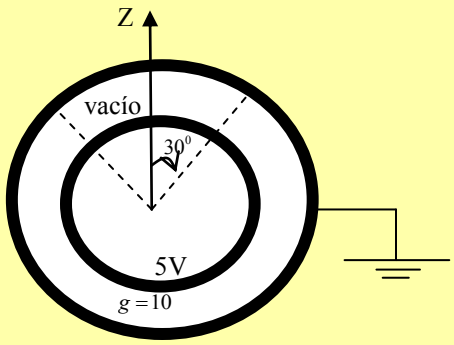
Demostrar que en la interface habrá una densidad superficial de carga:

$$\sigma = \frac{\varepsilon J}{g}$$

13. Un cilindro de material con conductividad g, de longitud ℓ y radio $20a$ está sometido a una diferencia de potencial entre sus extremos. Las superficies extremas del cilindro se mantienen a los potenciales U_0 y $-U_0$, respectivamente. Si se hace en el centro del cilindro una cavidad esférica de radio a, determine su resistencia.

Aplicación numérica: $g = 0.011\,\text{ohm-m}$; $\ell = 20\,\text{m}$; $a = 1\,\text{cm}$.

14. Entre dos cáscaras esféricas de alta conductividad, en la región $\theta \geq 30^0$ y $1cm \leq r \leq 2cm$ hay un medio de conductividad $g = 10$. Halle la corriente cuando la diferencia de potencial es 5 V.



CAPITULO 8

MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

8.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos el campo inducción magnética **B** en la teoría electromagnética como un concepto conveniente para describir las fuerzas magnéticas entre corrientes estacionarias. No consideramos las propiedades de los materiales. El objetivo de este capítulo es establecer la relación entre el campo **B** y sus fuentes, tanto la relación integral (ley de Biot y Savart) como las diferenciales (rotacional y divergencia). En electrostática es muy simple construir una expresión integral para el campo eléctrico a partir de la ley para las fuerzas entre cargas eléctricas puntuales (ley de Coulomb). No es tan simple diseñar un experimento para medir fuerzas entre cargas puntuales en movimiento y menos aún, a partir de esos resultados experimentales deducir la ley de Biot y Savart. Es muy frecuente en los textos de electromagnetismo dar por hecho que esto sí se puede hacer. En la sección 8.3, como alternativa, explicamos que los fundamentos de la ley de Biot y Savart son la ley de Coulomb y las transformaciones de Lorentz (teoría especial de la relatividad).

8.2 FUERZA MAGNÉTICA Y CAMPO INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Es un hecho experimental que dos alambres por los cuales circula corriente eléctrica ejercen fuerzas entre sí. Estas fuerzas son de la misma naturaleza que las ejercidas entre un imán y un trozo de hierro. En ambos casos las fuerzas se deben a la interacción entre cargas eléctricas en movimiento.

La fuerza sobre una partícula cargada en movimiento que llamaremos fuerza electromagnética, puede descomponerse en una fuerza eléctrica y una fuerza magnética:

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \qquad (1)$$

(La fuerza electromagnética entre dos cuerpos macroscópicos es la superposición de las fuerzas electromagnéticas entre sus partículas componentes).

La fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ depende de la distribución de carga de los cuerpos interactuantes (ley de Coulomb). En cada uno de los elementos mencionados (alambres con corriente, imán y trozo de hierro) se tiene $\sigma = 0$ y $\rho = 0$; así que entre ellos la fuerza eléctrica resultante es nula. Sólo queda la fuerza magnética.

La fuerza magnética, $\vec{F}_m$, según la ec. (1), queda definida como una componente de la interacción electromagnética entre partículas cargadas en movimiento. Teniendo en cuenta que la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e$, sobre una partícula existe independientemente de su velocidad, podemos precisar la definición de fuerza magnética de la siguiente manera.

Definición: Si en cualquier punto P de una región $\Re$ colocamos una carga q en reposo (con respecto a un sistema inercial) sin que experimente ninguna fuerza y si al hacer pasar la misma carga q por el punto P con velocidad $\vec{v}$, se obtiene una fuerza $\vec{F}_m$, diremos que ésta es una **fuerza magnética**.

Definición: Si sobre una carga q con velocidad $\vec{v}$ actúa una fuerza magnética, $\vec{F}_m$, ésta se debe a que alguna distribución de partículas cargadas en movimiento está produciendo un campo $\vec{B}$ llamado **inducción magnética**, tal que:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (2)$$

En electrostática, para determinar el campo eléctrico $\vec{E}$ podemos hacer un experimento muy sencillo en que se mida la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ sobre una partícula con carga conocida y muy pequeña q_0.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

No se puede hacer lo mismo para determinar el campo inducción magnética, porque, si para una velocidad $\vec{v}$ de la carga q obtenemos una fuerza $\vec{F}_m$, ésta puede ser debida a $\vec{B}$ o al campo $\vec{B} + \vec{B}_{//}$:

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\,\vec{v} \times (\vec{B} + \vec{B}_{//})$$

donde $\vec{B}_{//}$ es una componente de la inducción magnética paralela a $\vec{v}$.

Se puede demostrar (ver problema 1) que son necesarios y suficientes dos experimentos para determinar experimentalmente, y usando la definición (2), el campo de inducción magnética $\vec{B}$ en cada punto del espacio.

Las unidades de $\vec{B}$ en el sistema internacional que se deducen de la ec. (2) son:

$$\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$$

y toman el nombre de Tesla (T) ó weber/m^2.

También se usa: 1 Gauss = 10^{-4} T

8.3 FUERZAS Y TORQUES SOBRE CORRIENTES

En esta sección discutimos los efectos de un campo inducción magnética $\vec{B}$ sobre un circuito o una distribución de corriente sin interesarnos en el origen de dicho campo.

En una región $\mathfrak{R}$ donde existe un campo de inducción magnética, $\vec{B}(\vec{r})$; sobre cualquier partícula con carga q y velocidad $\vec{v}$ (portador de corriente), actúa una fuerza magnética:

$$\vec{f}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Si hay n portadores por unidad de volumen, la fuerza magnética sobre cualquier elemento de volumen dV será:

$$d\vec{F} = n\,q\,\vec{v} \times \vec{B}\,dV \qquad (3)$$

y recordando la definición del vector densidad de corriente, podemos escribir:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}\,dV \qquad (4a)$$

La fuerza magnética sobre un trozo de material de volumen V en el cual hay una corriente eléctrica descrita por el vector $\vec{J}(\vec{r})$ es:

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\, dV \qquad (5a)$$

Para corrientes eléctricas que circulan en alambres conductores delgados de sección transversal A, la ec. (4a) se puede escribir:

$$d\vec{F} = n\, q\, \vec{v} \times \vec{B}\, A \left| d\vec{\ell} \right|$$

y como $\vec{v} \,//\, d\vec{\ell}$ tendremos:

$$d\vec{F} = n\, q \left| \vec{v} \right| A\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

ó

$$d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad (4b)$$

La fuerza sobre cualquier segmento finito de corriente se obtendrá integrando. La fuerza sobre un circuito cerrado de corriente está dado por:

$$\vec{F} = \oint_C I\, d\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad (5b)$$

Caso especial: Si la corriente es estacionaria, I es la misma en cualquier punto del circuito, y si además $\vec{B}$ es uniforme, obtenemos:

$$\vec{F} = I\left(\oint d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = \vec{0} \qquad (6)$$

La fuerza magnética que un campo inducción magnética uniforme ejerce sobre cualquier circuito cerrado de corriente estacionaria es siempre nula.

Para corrientes superficiales podemos obtener expresiones análogas a las ecuaciones (4a), (4b), (5a) y (5b):

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B}\, da \qquad (4c)$$

$$\vec{F} = \iint_S \vec{K} \times \vec{B}\, da \qquad (5c)$$

donde $\vec{K}$ es el vector densidad de corriente superficial.

Torque sobre un circuito de corriente Para un elemento $I\,d\vec{\ell}$ de corriente, el torque es:

$$d\vec{\tau} = \vec{r}\times(I\,d\vec{\ell}\times\vec{B}) \tag{7}$$

y el torque sobre todo el circuito será:

$$\vec{\tau} = I\oint_C \vec{r}\times(d\vec{\ell}\times\vec{B}) \tag{7a}$$

Al efectuar la integral vectorial (7a) debe tenerse en cuenta que cada una de las tres componentes tiene cuatro sumandos:

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{\ell}\times\vec{B})\right]_x = y\,dx\,B_y - y\,dy\,B_x - z\,dz\,B_x + z\,dx\,B_z$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{\ell}\times\vec{B})\right]_y = z\,dy\,B_z - z\,dz\,B_y - x\,dx\,B_y + x\,dy\,B_x$$

$$\left[\vec{r}\times(d\vec{\ell}\times\vec{B})\right]_z = x\,dz\,B_x - x\,dx\,B_z - y\,dy\,B_z + y\,dz\,B_y$$

Si el campo de inducción magnética $\vec{B}$ es uniforme: $B_x = \text{cte}$; $B_y = \text{cte}$; $B_z = \text{cte}$; entonces algunas de las integrales a evaluar son del tipo:

$$\oint y\,dy \quad , \quad \oint z\,dz \quad , \quad \oint x\,dx$$

las cuales, como puede verse fácilmente, son nulas y otras son del tipo:

$$\oint_C y\,dx \quad , \quad \oint_C x\,dy \quad , \quad \oint_C z\,dy \quad , \quad \text{etc.}$$

Efectuar estas integrales sobre el circuito tridimensional arbitrario C es lo mismo que efectuarlas sobre sus proyecciones en los planos cartesianos. El módulo de cada uno de estas seis integrales es el área de la proyección de C sobre el respectivo plano y los signos se establecen teniendo en cuenta la regla de permutación cíclica x, y, z. Así tenemos:

$$\oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx = S_z$$

$$\oint_C y\,dz = \oint_C -z\,dy = S_x \tag{8a}$$

$$\oint_C z\,dx = \oint_C -x\,dz = S_y$$

El torque sobre un circuito cerrado de corriente estacionaria, debido a un campo inducción magnética uniforme, es entonces:

$$\vec{\tau} = I\left\{B_z S_y - B_y S_z\ ,\ B_x S_z - B_z S_x\ ,\ B_y S_x - B_x S_y\right\}$$

es decir:

$$\vec{\tau} = I\vec{S}\times\vec{B}$$

donde $\vec{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j} + S_z\hat{k}$ es el vector área asociado al circuito.

Definición: Se llama momento magnético de un circuito a la cantidad:

$$\vec{m} = I\vec{S} \qquad (9a)$$

Entonces el torque queda expresado por:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}} \qquad (10)$$

NOTA: De las ecs. (8a) puede verse que el vector área asociado a un circuito *C* también puede escribirse como:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r}\times d\vec{\ell} \qquad (8b)$$

De modo que la ec. (9a) para el momento magnético de un circuito o en general de una distribución de corriente también puede escribirse en la forma

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint_C \vec{r}\times d\vec{\ell} \quad \text{ó} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{r}\times\vec{J}\,dV \quad \text{ó} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\iint_S \vec{r}\times\vec{K}\,da \qquad (9b)$$

8.4 CAMPOS E, B Y TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Para comprender mejor la naturaleza de la fuerza magnética es conveniente usar los resultados de la teoría de la relatividad especial para explicar el siguiente **Problema**: Un observador O_2 viaja en un coche con velocidad *V* respecto al laboratorio. En el mismo coche hay dos cargas puntuales fijas respecto a O_2: Q_a en el origen y Q_b en el punto (x_2, y_2, 0). Describa las fuerzas electromagnéticas entre las cargas puntuales como las mediría O_2 y como las observaría un observador O_1 fijo en el laboratorio.

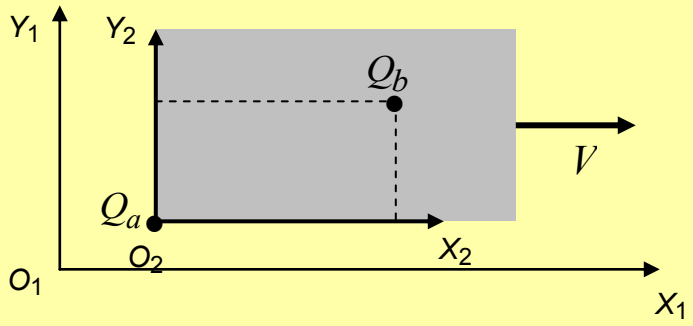


Fig. 1 Esquema para explicar la transformación de Lorentz de una fuerza coulombiana.

En teoría de relatividad especial, las transformaciones de Lorentz nos dan la relación entre las coordenadas observadas por O_2 con las observadas por O_1.

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma\left[x_2 + Vt_2\right] & x_2 &= \gamma\left[x_1 - Vt_1\right] \\ y_1 &= y_2 & y_2 &= y_1 \\ z_1 &= z_2 & z_2 &= z_1 \\ t_1 &= \gamma\left[t_2 + \left(\frac{V}{c^2}\right)x_2\right] & t_2 &= \gamma\left[t_1 - \left(\frac{V}{c^2}\right)x_1\right] \end{aligned} \tag{11}$$

donde $\gamma = \left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ y c es la velocidad de la luz.

De éstas se pueden deducir las transformaciones de cualquier cantidad física observada por ambas observadores, en particular, se puede obtener la relación entre la fuerza que mide O_2 sobre una partícula y la misma fuerza observada por O_1.

$$\begin{aligned} F_{x1} &= F_{x2} + \frac{V}{c^2 + \mathrm{v}_{x2}V}\left(\mathrm{v}_{y2}F_{y2} + \mathrm{v}_{z2}F_{z2}\right) \\ F_{y1} &= \frac{F_{y2}}{\gamma\left[1 + \dfrac{\mathrm{v}_{x2}V}{c^2}\right]} \\ F_{z1} &= \frac{F_{z2}}{\gamma\left[1 + \dfrac{\mathrm{v}_{x2}V}{c^2}\right]} \end{aligned} \tag{12}$$

La fuerza experimentada por Q_b debido a su interacción con Q_a es descrita por el observador O_2 como una interacción coulombiana:

$$\vec{F}_{b2} = \frac{Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x_2\hat{i} + y_2\hat{j}}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}}\right\}$$

ó

$$F_{bx2} = \frac{Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}}\right\} \qquad (13)$$

$$F_{by2} = \frac{Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}}\right\}$$

Aplicando las reglas de transformación de fuerzas (ecs 12) y teniendo en cuenta que $v_{x2} = v_{y2} = 0$, se puede obtener la fuerza experimentada por Q_b medida por O_1.

$$F_{bx1} = F_{bx2} = \frac{Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}}\right\}$$

$$F_{by1} = \frac{F_{by2}}{\gamma} = \frac{Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0\,\gamma}\left\{\frac{y_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{3/2}}\right\} \qquad (14)$$

Utilizando las transformaciones de coordenadas (ecs. 11), podemos obtener la fuerza sobre Q_b que observa O_1 en el instante $t_1 = t_2 = 0$ en términos de las coordenadas x_1, y_1, que escribimos a continuación eliminando el subíndice 1:

$$F_{bx} = \frac{\gamma\, Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}}\right\}$$

$$F_{by} = \frac{\gamma\, Q_a\, Q_b}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y\left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right]}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}}\right\} \qquad (15)$$

Considerando que sólo estamos interesados en casos donde $V << c$ $(\gamma \approx 1)$; las ecuaciones (15) son equivalentes a la ecuación vectorial:

$$\vec{F_b} = \frac{Q_b Q_a \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{Q_b Q_a V^2 \hat{j}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}$$

y teniendo en cuenta:

$$-V^2 \hat{j} = \vec{V} \times \left[\frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3} \right] \qquad \text{y} \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

podemos escribir que según el observador O_1, la fuerza sobre la carga Q_b es:

$$\vec{F_b} = Q_b \vec{E}_a(\vec{r}) + Q_b \vec{V} \times \vec{B}_a(\vec{r})$$

donde:

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = \frac{Q_a \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{B}_a(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_a \vec{V} \times \vec{r}}{r^3} \quad .$$

Podemos concluir que la fuerza electrostática observada por O_2 es vista por O_1 como la superposición de una fuerza eléctrica y una fuerza magnética. Además, podemos generalizar y decir que una carga q con velocidad $\vec{v}$ que pasa por $\vec{r}'$ genera en el punto $\vec{r}$ un campo $\vec{B}$ dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\, \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \qquad (16)$$

Este es el fundamento de la ley de Biot y Savart que desarrollaremos en la sección 8.5.

NOTA: La constante μ_0 se llama permeabilidad magnética del vacío y su valor en el sistema internacional de unidades es $4\pi \times 10^{-7}$

8.5 LEY DE BIOT Y SAVART

La ec (16) nos da el campo inducción magnética producido en el punto $\vec{r}$ por una carga puntual q que pasa con velocidad $\vec{v}$ por el punto $\vec{r}'$.

Si en una región del espacio con n portadores por unidad de volumen, y si en un elemento de volumen dV' ubicado en $\vec{r}'$ estos portadores tienen una velocidad $\vec{v}$, entonces, la contribución de estos al campo inducción magnética será:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n\, q\, \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

En términos del vector densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}')$ tendremos:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \qquad (17)$$

El campo $\vec{B}$ debido a todas las corrientes en una región finita del espacio será:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \qquad (18a)$$

Teniendo en cuenta que:

$$I\, d\vec{\ell}' = \vec{J}(\vec{r}')\, d\, V' = \vec{K}\, d\, a',$$

Tendremos que para corrientes superficiales:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' \qquad (18b)$$

y para corrientes en circuitos filiformes:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I\, d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \qquad (18c)$$

Las tres ecuaciones (18) son tres maneras de expresar la **ley de Biot y Savart**, según la distribución geométrica de la corriente que produce el campo de inducción magnética. (Relación integral entre $\vec{B}$ y sus fuentes)

APLICACIONES DE LA LEY DE BIOT Y SAVART

Mostramos a continuación algunos ejemplos de cómo calcular el campo inducción magnética, $\vec{B}$, debido a la corriente I en circuitos filiformes o debido a densidades de corriente $\vec{J}$ en el espacio, o debido a corrientes superficiales ($\vec{K}$).

Ejemplo 1

Hallar el campo inducción magnética $\vec{B}$ debido a un alambre infinitamente largo con corriente I.

Solución

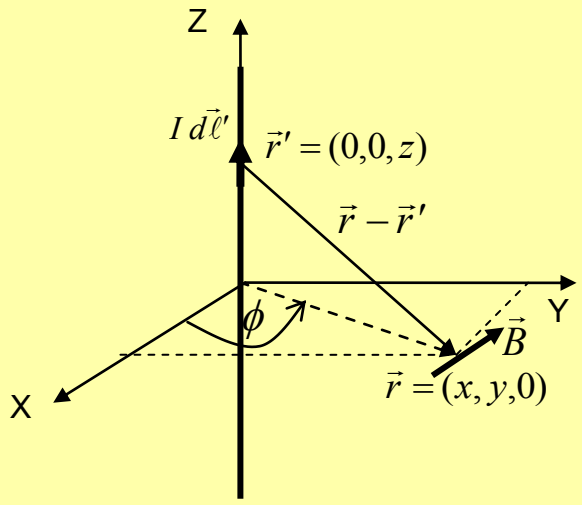


Fig. 2 Esquema para explicar el cálculo de **B** debido a un alambre infinito

De acuerdo a la ec. (18c), la contribución al campo $\vec{B}$ debido a un elemento $I\,d\vec{\ell}'$ es:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

$$\vec{r}' = (0,0,z) \quad \vec{r} = (x,y,0) \quad d\vec{\ell}' = dz\,\hat{k}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz \\ x & y & -z \end{vmatrix}$$

Debido a todo el alambre infinito:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-y\,dz\,\hat{i} + x\,dz\,\hat{j}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\right\}(-y, x, 0)$$

Haciendo el cambio de variable $z = rTg\theta$ y evaluando la integral se obtiene:

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi}$$

Ejemplo 2

Hallar el campo inducción magnética, $\vec{B}$, debido a una espira circular de radio R por la cual circula corriente eléctrica I; en cualquier punto del eje perpendicular que pasa por el centro de la espira.

Solución

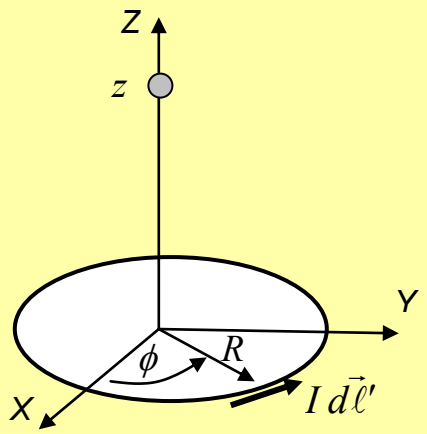


Fig. 3 Campo $\vec{B}$ de una espira circular

Un elemento de corriente $I\,d\vec{\ell}'$ produce en el punto (0,0,z) un campo:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Tomando como plano XY el plano de la espira y el origen en su centro tendremos:

$$\vec{r}' = (R\,\mathrm{Cos}\phi\,,\,R\,\mathrm{Sen}\phi\,,\,0) \quad ; \quad d\vec{\ell}' = (-R\,\mathrm{Sen}\phi\,,\,R\,\mathrm{Cos}\phi\,,\,0)\,d\phi \quad ; \quad \vec{r} = (0\,,\,0\,,\,z).$$

Por lo tanto:

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\,Sen\phi\,d\phi & R\,Cos\phi\,d\phi & 0 \\ -R\,Cos\phi & -R\,Sen\phi & z \end{vmatrix}$$

El campo debido a la corriente en toda espira es entonces:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R\,z\,\mathrm{Cos}\phi\,,\,R\,z\,\mathrm{Sen}\phi\,,\,R^2)}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,d\phi$$

Evaluando la integral se obtiene:

$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{k}}$$

Ejemplo 3

Hallar el campo inducción magnética $\vec{B}$ en el eje de un solenoide de *N* espiras circulares de radio R uniformemente espaciadas por las cuales circula una corriente I.

Solución:

Llamamos eje *Z* al eje del solenoide y tomamos origen de coordenadas en el centro.

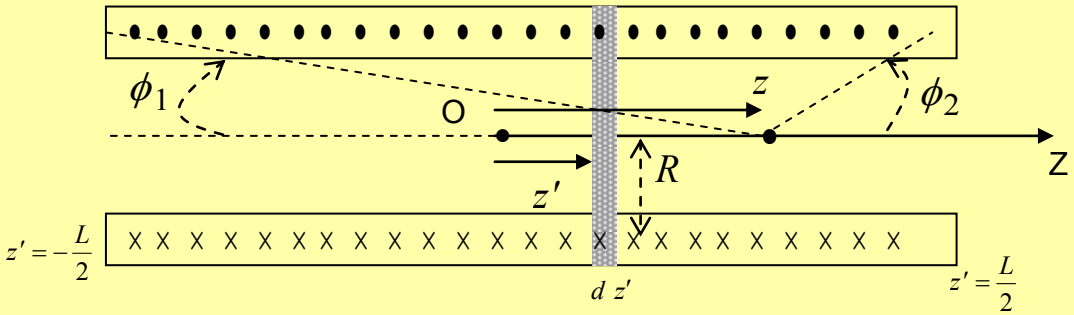


Fig. 4 Esquema para explicar el cálculo del campo $\vec{B}$ de un solenoide

De acuerdo con el resultado del ejercicio anterior, debido a $\frac{N\,dz'}{L}$ espiras ubicadas en el plano $z = z'$, el campo en el punto z es:

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 NI}{2L}\,dz'\,\frac{R^2}{\left[R^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}\,\hat{k}$$

Debido a todas las espiras del solenoide, el campo $\vec{B}$ en el punto z es entonces:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 NIR^2}{2L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{\left[R^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}\,\hat{k},$$

Haciendo el cambio de variable $z - z' = R\,Tg\theta$ e integrando se obtiene:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 NI}{2L}\left(\frac{\left(\frac{L}{2}+z\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}+z\right)^2}} + \frac{\left(\frac{L}{2}-z\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}}\right)\hat{k}$$

ó

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 NI}{2L}\{\mathrm{Cos}\phi_1 + \mathrm{Cos}\phi_2\}$$

Si el solenoide es muy largo, es decir, $L >> R$ y si nos interesa el campo $\vec{B}$ en puntos dentro del solenoide y alejados de los extremos tendremos

$$\vec{B}(z) = \mu_0\, nI\,\hat{k}$$

donde n es el número de espira por unidad de longitud.

Ejemplo 4

Por un plano infinito circula una corriente K por unidad de longitud. Hallar el campo inducción magnética en cualquier punto del espacio.

Solución:

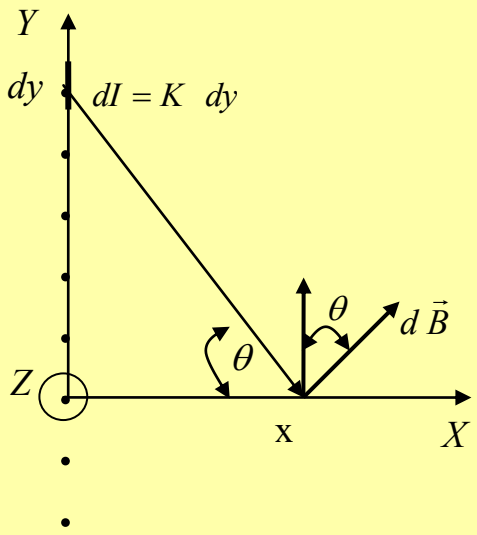


Fig . 5 Esquema para explicar el cálculo del campo inducción magnética debido a un plano infinito con densidad de corriente superficial. La corriente circula por el plano YZ.

Suponemos que $\vec{K} = K\,\hat{e}_z$.

Consideramos que el plano está constituido por una superposición continua de hilos con corriente:

$$dI = K\,dy$$

La simetría del problema permite establecer que $\vec{B} = B\,\hat{e}_y$

$$dB_y(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{K\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dy}{\left(x^2+y^2\right)}\,\hat{e}_y$$

Hacemos el cambio de variable $y = x\,\mathrm{Tg}\,\theta$ y evaluamos la integral; obtenemos:

$$\vec{B}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{e}_y & ; \quad x > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{e}_y & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Este resultado se generaliza para una corriente $\vec{K}$ uniforme en cualquier plano:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{K}\times\hat{n}}$$

donde $\hat{n}$ es la perpendicular desde el plano al punto en que se requiere hallar $\vec{B}$.

Ejemplo 5

En el semiespacio $x<0$ existe una corriente eléctrica que se puede expresar por el vector:

$$\vec{J} = J_0\, e^{x/a}\, \hat{e}_z \;,\quad x < 0$$

Hallar el campo inducción magnética en cualquier punto del espacio.

Solución

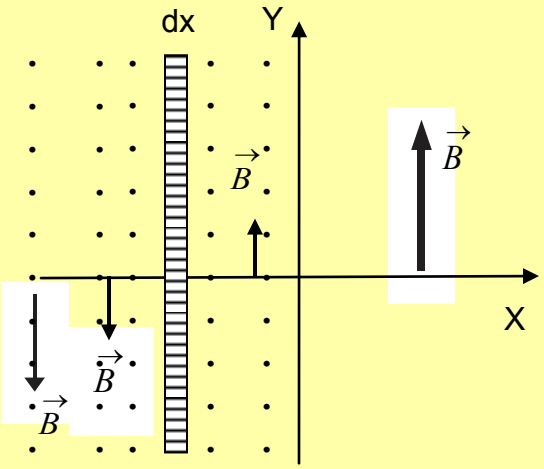


Fig. 6 Esquema para explicar el cálculo del campo B debido a una corriente ex ponencial.

Una laminilla delgada de espesor dx puede ser considerada como un plano infinito con densidad superficial de corriente

$$\vec{K} = \vec{J}(x)\, dx\,,$$

y produce en un punto *x* > 0 el campo:

$$dB(x) = \frac{\mu_0\, J(x)\, dx}{2}\, \hat{e}_y$$

Debido a toda la distribución de co-rriente, el campo inducción magnética es:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x/a}\, dx\, \hat{e}_y$$

Evaluando la integral se obtiene:

$$\boxed{\vec{B}(x) = \frac{\mu_0\, J_0\, a}{2}\, \hat{e}_y \quad ; \quad x>0}$$

Para puntos $x<0$, evaluamos por separado las contribuciones de la corriente a uno y otro lado de x :

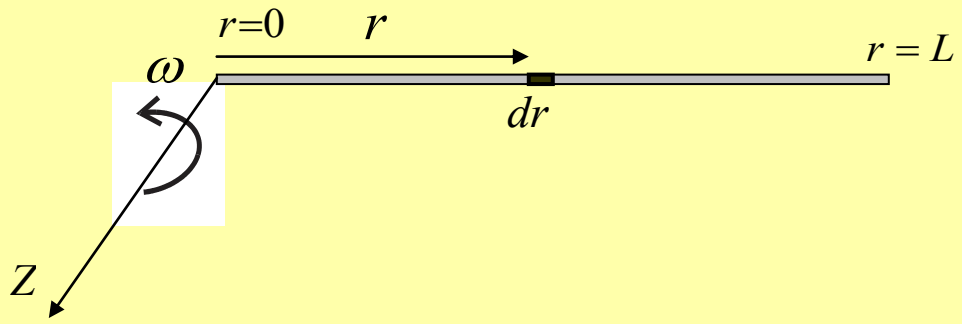
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{x} e^{x/a}\, dx \;-\; \int_{x}^{0} e^{x/a}\, dx \right\} \hat{e}_y$$

$$\boxed{\vec{B}(x) = \frac{\mu_0\, J_0\, a}{2} \left\{ 2e^{x/a} - 1 \right\} \hat{e}_y}$$

Pregunta: ¿En qué valor de x el campo $\vec{B}$ cambia de sentido?

Ejemplo 6. Una varilla dieléctrica muy delgada, de longitud L, con densidad lineal de carga λ rota con velocidad angular ω respecto a un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos. Hallar el campo inducción magnética $\vec{B}$ en cualquier punto del eje de rotación (eje *Z*). Aplicación numérica: Evalúe el campo en $z = L$ para los valores: $\lambda = 1\,\text{mC/m}$, $\omega = 10^7\ \text{rad/s}$

Solución:



Al rotar, cada elemento dr de la varilla es equivalente a una espira de radio *r* con corriente:

$$dI = \lambda\, dr \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$$

Luego, de acuerdo con el resultado del ejemplo 2 y el principio de superposición:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\lambda\, \omega}{2\pi} \right) \int_0^L \frac{r^2\, dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\, \hat{e}_z$$

Haciendo el cambio de variable $r = z\ \text{Tg}\theta$ e integrando tendremos:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\, \lambda\, \omega}{4\pi} \left| \ln \left\{ \frac{\sqrt{L^2 + z^2}}{z} + \frac{L}{z} \right\} + \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}} \right| \hat{e}_z$$

Aplicando a los valores numéricos dados en el enunciado se tiene:

$$\boxed{\vec{B}(z) = 1{,}58\ \text{mT}\ \hat{e}_z}$$

LINEAS DE INDUCCION MAGNETICA: De la misma forma que el campo eléctrico se puede representar gráficamente por líneas de fuerza; el campo inducción magnética puede representarse por líneas de inducción magnética que son curvas orientadas cuyo sentido es el mismo que el de $\mathbf{B}$ y su número por unidad de área es proporcional al módulo de $\mathbf{B}$. En las figuras 8 se muestran dos ejemplos.

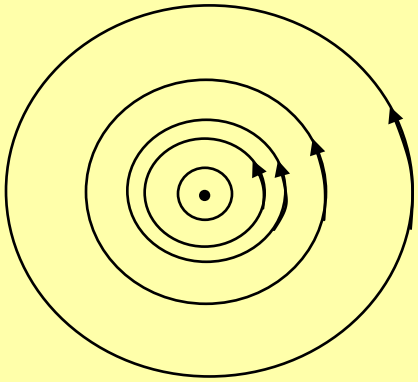


Fig. 8a Líneas de inducción magnética del campo $\vec{B}$ producido por un alambre infinito perpendicular al plano de la figura. La separación entre las líneas aumenta con r.

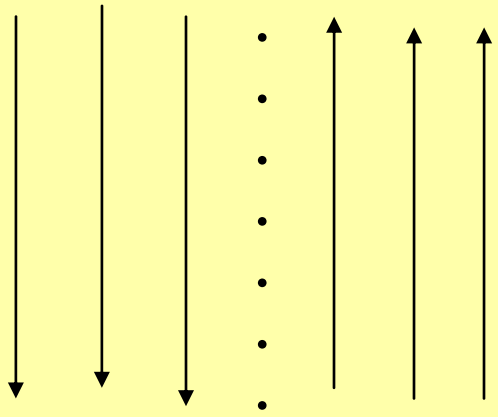


Fig. 8b Líneas de inducción magnética del campo $\vec{B}$ producido por un plano infinito perpendicular al plano de la figura. Note que las líneas están uniformemente espaciadas.

8.6 LEY CIRCUITAL DE AMPERE

Así como en el capitulo II a partir de la ec. (13), que es básicamente la ley de Coulomb, y el concepto de ángulo sólido obtuvimos la ley de Gauss; ahora a partir de la ley de Biot y Savart y el concepto de ángulo sólido demostraremos:

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \, I_{enc} \qquad (19)$$

donde C es una curva cerrada cualquiera en el espacio e I_{enc} es la corriente que pasa a través de cualquier superficie limitada por C. La ec. (19) es la expresión de ley circuital de Ampere.

Por simplicidad asumiremos que $\vec{B}$ es producido solamente por un circuito filiforme C' con corriente I'; de tal manera que $\vec{B}$ está dado por la ec. (18c). Reemplazando esta expresión en la ec. (19) tenemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{d\vec{\ell} \cdot \left\{ d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}') \right\}}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3}$$

Teniendo en cuenta las reglas de permutación del triple producto escalar podemos escribir:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{(d\vec{\ell} \times d\vec{\ell}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \qquad (20)$$

Recordando que el producto vectorial es el área del paralelogramo definido por los dos vectores y recordando además la definición de ángulo sólido, vemos que la ec. (20) se puede analizar en términos de ángulos sólidos.

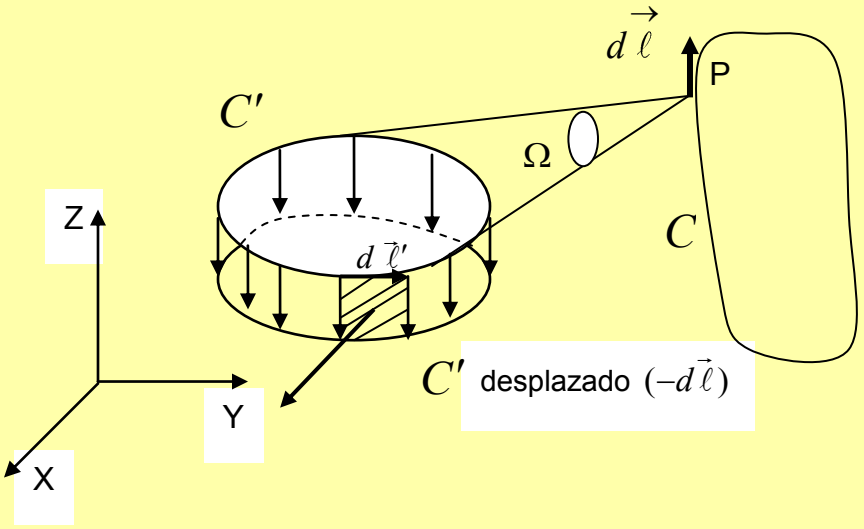


Fig. 9 De la ley de Biot y Savart a la ley de Ampere, usando el concepto de ángulo sólido

La situación general está ilustrada en la figura 9. Consideremos un punto P de la trayectoria de integración C. El circuito fuente C' subtiende en el punto P un ángulo sólido Ω. Si hacemos a partir de P un desplazamiento $\mathrm{d}\vec{\ell}$; en el punto $\mathrm{P} + \mathrm{d}\vec{\ell}$ el circuito C' subtenderá un ángulo $(\Omega + \mathrm{d}\Omega)$. Podemos obtener el mismo cambio relativo imaginando que tenemos fijo el punto P y hacemos un desplazamiento $-d\vec{\ell}$ a todos los puntos de C'. La nueva posición y orientación de C' también esta mostrada en la figura 8.

Nótese ahora que el integrando de la ec. (20) es el ángulo sólido subtendido en P por el área $(-d\vec{\ell}\times d\vec{\ell}')$. Entonces cuando efectuamos la integral sobre C'.

$$\oint_{C'} \frac{(-d\vec{\ell}\times d\vec{\ell}')\bullet(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

estamos obteniendo $\mathrm{d}\Omega$, la diferencia entre los ángulos sólidos que subtienden en el punto P el circuito C' dado y el que resulta de desplazar C' una cantidad $-d\vec{\ell}$. El $\mathrm{d}\Omega$ que estamos obteniendo es también la diferencia entre los ángulos sólidos que el circuito C', fijo, subtiende en $\mathrm{P}+d\vec{\ell}$ y en P.

$$d\Omega = \oint_{C'} \frac{\left(d\vec{\ell}\times d\vec{\ell}'\right)\bullet(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (21)$$

Reemplazando (21) en (20) tenemos:

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_C d\Omega = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\Delta\Omega \qquad (22)$$

donde $\Delta\Omega$ es la diferencia entre los ángulos subtendidos en un punto P antes y después de dar una vuelta completa siguiendo la trayectoria C. Observemos las dos siguientes situaciones:

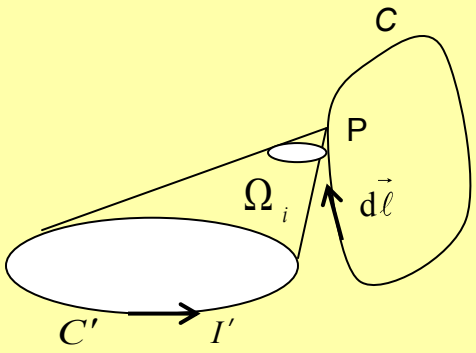


Fig. 9a La trayectoria C no atraviesa el área limitada por circuito C'

CASO 1. Si la trayectoria C no atraviesa al circuito C', las orientaciones relativas son mostradas en la figura (9a). Si empezamos la integración en P entonces cuando regresemos a P después de completar la trayectoria C, el ángulo sólido final tiene el mismo valor que el que tenia inicialmente. Así pues: $\Delta\Omega = 0$ y la ec. (22) vendría a ser:

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{\ell} = 0$$

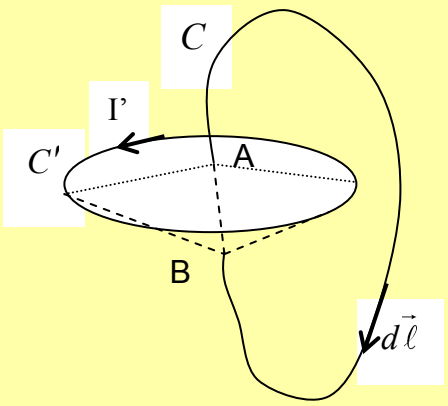


Fig. 9b La trayectoria C sí atraviesa el área limitada por el circuito C'

CASO 2 Si la trayectoria C atraviesa al circuito C', las orientaciones relativas son las mostradas en la figura (9b). Si escogemos como un punto inicial un punto, A, justamente encima del circuito C' $(\Omega_i = -2\pi)$ y como punto final de la trayectoria un punto, B, justamente debajo del área limitada por el circuito C' $(\Omega_f = 2\pi)$. Se tiene entonces $\Delta\Omega = 4\pi$ y por lo tanto

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I' \qquad \text{L.q.q.d.}$$

Lo que hemos demostrado aqui para el caso particular de un circuito filiforme puede ser generalizado, usando el principio de superposición, para un sistema de muchos circuitos o para un sistema de corrientes volumétricas y superficiales, obteniéndose en general lo propuesto en la ec. (19):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc}$$

FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE AMPERE.- La ec. (19), usando el teorema de Stokes, puede escribirse:

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc}$$

donde S es cualquier superficie limitada por C. Recordando además que la corriente es el flujo del vector $\mathbf{J}$ tenemos:

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

puesto que esta igualdad es válida para cualquier superficie S tendremos:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}} \qquad (23)$$

Esta es la expresión de la ley de Ampere en forma diferencial.

8.7 APLICACIONES DE LA LEY DE AMPERE

Ejemplo 7

Hallar el campo inducción magnética, $\vec{B}$, debido a una superficie cilíndrica de radio R y de longitud infinita por la que circula una densidad de corriente superficial uniforme K.

Solución

En la figura se muestra la sección transversal de una superficie cilíndrica muy larga por la cual circula corriente eléctrica en la dirección que sale del plano del dibujo. Considerando la corriente superficial como una distribución de corrientes filiformes, perpendiculares al plano de la figura, la simetría del problema permite deducir que el campo $\vec{B}$ en el punto P es perpendicular al segmento OP. Se muestra también la dirección del campo en otros puntos.

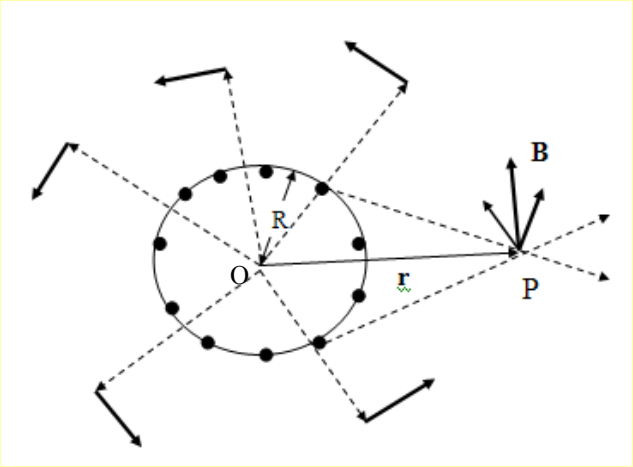


Fig. 10 Sección transversal de una superficie cilíndrica conductora de radio *R*. Esquema para explicar el cálculo del campo $\vec{B}$.

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} = \begin{cases} \mu_0 K (2\pi R) & , \quad \text{si } r > R \\ 0 & , \quad \text{si } r < R \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = B(2\pi r)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{KR}{r} e_\phi & , \quad \text{si } r > R \\ 0 & , \quad \text{si } r < R \end{cases} \quad \text{ó} \quad \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\phi & , \quad \text{si } r > R \\ 0 & , \quad \text{si } r < R \end{cases}$$

Ejemplo 8

Un cable coaxial se ha fabricado rodeando un conductor cilíndrico sólido de radio R_1 con una cáscara cilíndrica conductora coaxial de radio interno R_2 y radio externo R_3. En la práctica usual una corriente I fluye en un sentido por el conductor interno y regresa por el conductor externo.

Determinar el campo $\vec{B}$ en puntos de las distintas regiones dentro y fuera del cable. Suponer que la densidad de corriente $\vec{J}$ es uniforme en cada conductor.

Solución

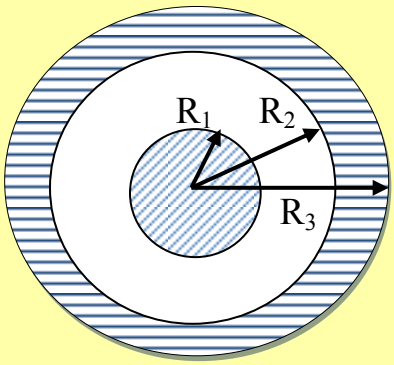


Fig. 11 Sección transversal de cable coaxial.

En la fig. (11) se muestra la sección transversal del cable coaxial. Es evidente que en cada conjunto de puntos equidistantes al eje, el campo **B** debe tener la misma magnitud. Esperamos, además, que las líneas de inducción magnética formen circunferencias coaxiales con eje del cable, como en el ejemplo anterior.

La ley de Ampere, ec. (19), aplicada a circunferencias de radio r en cada una de las regiones dará entonces:

a) En la región: $r < R_1$

$$2\pi r B = \frac{\mu_0 I r^2}{R_1^2}$$

luego:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}\hat{e}_\phi$$

b) En la región: $R_1 < r < R_2$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

luego:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\phi$$

c) En la región: $R_2 < r < R_3$

$$2\pi r B = \mu_0 \left\{ I - I \frac{\left(r^2 - R_2^2\right)}{\left(R_3^2 - R_2^2\right)} \right\}$$

luego:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{\left(R_3^2 - r^2\right)}{\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\hat{e}_\phi$$

Ejemplo 9

Por un plano infinito circula corriente K por unidad de longitud en una dirección que podemos llamar $\hat{e}_z$. Determinar el campo $\vec{B}$ en cualquier punto del espacio.

Solución

Considerando el plano de corriente como una distribución de alambres muy delgados, podemos convencernos que $\vec{B}$ tiene las direcciones mostradas en la figura 12. Además, puesto que el plano es infinito, $\vec{B}$ tiene la misma magnitud en cualquier recta paralela al eje *Y*.

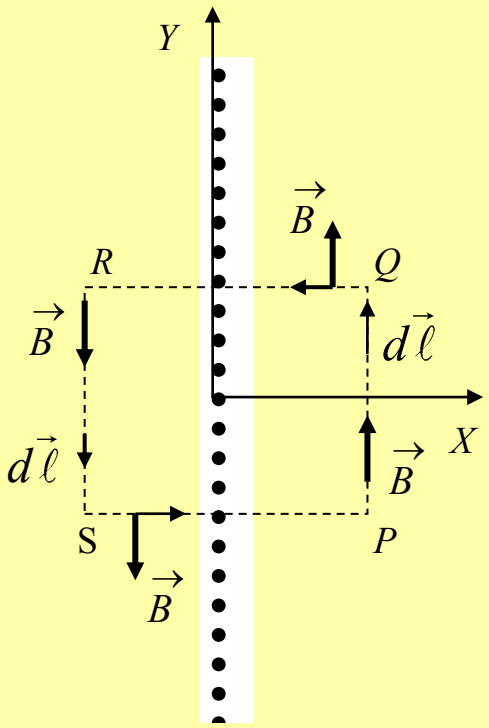


Fig. 12 Campo **B** debido a corriente superficial en plano infinito.

Para la trayectoria PQRSP mostrada en la fig. 12 la ley de Ampere da entonces:

$$2B(\Delta\ell) = \mu_0 K \Delta\ell$$

donde $\Delta\ell$ es la longitud del segmento PQ.

Luego:

$$B = \frac{\mu_0 K}{2}$$

y por lo tanto:

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{e}_y & ; \quad x > 0 \\ \dfrac{-\mu_0 K}{2}\hat{e}_y & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 10

Considere un bloque de corriente infinito y de espesor $2a$ como se muestra en la figura 13. La densidad de corriente, $\vec{J}$, es uniforme y está dirigida según *OZ*. Determinar el campo $\vec{B}$ dentro y fuera de esta distribución de corriente.

Solución:

Considerando el bloque como una distribución de planos infinitos podemos afirmar sin hacer ningún cálculo que el campo $\vec{B}$ tiene las direcciones mostradas en la fig. 13 en las correspondientes regiones.

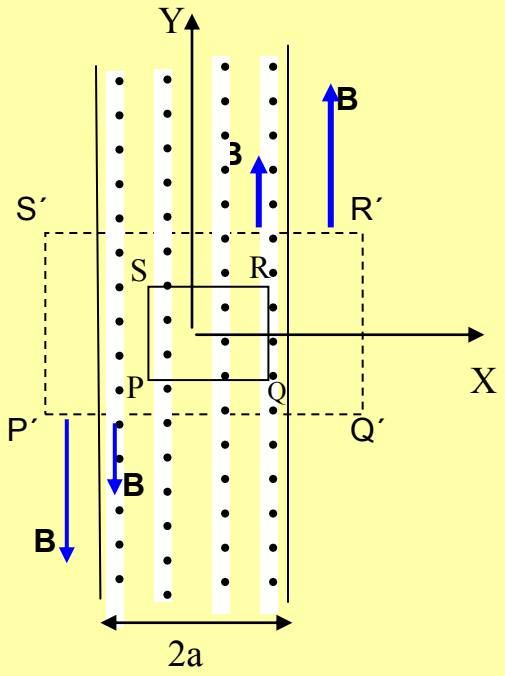


Fig. 13 Bloque infinito con $\vec{J}$ uniforme

Aplicando la ley de Ampere a la trayectoria PQRSP se tiene para la región $|x| < a$:

$$2B(\Delta\ell) = \mu_0 J(\Delta\ell)(2x)$$

donde $\Delta\ell$ es la longitud del segmento QR. Luego:

$$\vec{B} = \mu_0 J x \hat{e}_y$$

Así mismo, aplicando la ley de Ampere a la trayectoria P´Q´R´S´P´ se tiene: $2B(\Delta\ell) = \mu_0 J(2a)\Delta\ell$.

Luego:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 J a \hat{e}_y & ; \text{ si } x > a \\ -\mu_0 J a \hat{e}_y & ; \text{ si } x < a \end{cases}$$

NOTA: *La ley de Ampere, ec. (19), es válida para cualquier trayectoria cerrada y cualquier sistema de corrientes estacionarias; pero es de poco uso práctico para evaluar el campo* **B** *cuando se tiene una distribución de corrientes. La ley de Ampere sólo se puede usar para cálculos de* **B** *en casos en que por la disposición geométrica simple de las corrientes podamos predecir la dirección de* **B** *y las regiones en que* **B** *es uniforme. Esto es muy parecido al uso de la ley de Gauss para determinar* **E** *debido a distribuciones de carga simétricas.*

Ejemplo 11: Se ha verificado experimentalmente que, en una región del espacio, el campo inducción magnética en coordenadas cilíndricas está dado por la expresión:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad r < R_1 \\ \mu_0 \, C \, r \, \hat{e}_\phi & , \quad \text{si} \quad R_1 < r < R_2 \\ 0 & , \quad \text{si} \quad r > R_2 \end{cases}$$

Halle la distribución de corriente que origina este campo.

Sugerencia: Verifique que la corriente hallada realmente produce el campo dado.

Solución: Usando la expresión para rotacional en coordenadas cilíndricas (ecuación 33 de capítulo 1) encontramos que:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \, \vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad r < R_1 \\ 2 \, C \, \hat{e}_z & , \quad \text{si} \quad R_1 < r < R_2 \\ 0 & , \quad \text{si} \quad r > R_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Pero, aplicando la ley de Ampere podemos encontrar que el campo $\vec{B}$ producido por esta distribución de corriente es:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 C}{r} \left(r^2 - R_1^2 \right) \hat{e}_\phi & , \quad \text{si} \quad R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\mu_0 C}{r} \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \hat{e}_\phi & , \quad \text{si} \quad r > R_2 \end{cases}$$

que no es exactamente el campo dado en el enunciado. Se obtendrá el campo requerido si agregamos a la densidad de corriente dada en la ec. (*), en la superficie cilíndrica $r = R_1$, una corriente superficial:

$$\vec{K} = C \; R_1 \, \hat{e}_z$$

y en la superficie $r = R_2$ una corriente superficial:

$$\vec{K} = -C \, R_2 \, \hat{e}_z$$

8.8 LEY DE GAUSS PARA EL CAMPO MAGNÉTICO

En la sección 8.5 hemos establecido las relaciones entre el campo inducción magnética $\vec{B}$ y sus fuentes (ecuaciones 18). En la sección 8.6 establecimos la relación entre el rotacional de $\vec{B}$ y las corrientes fuentes del campo (ec. 23). En esta sección nos proponemos deducir una expresión para la divergencia de $\vec{B}$, concretamente, demostraremos que:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0} \qquad (24)$$

PRUEBA

El campo inducción magnética $\vec{B}$ siempre se puede expresar como una superposición de términos de la forma de las ec. (17). Así que para demostrar la ec. (24) basta demostrar que:

$$\operatorname{div}\left[\vec{J}(\vec{r}\,')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] = 0 \qquad (25)$$

A su vez, aplicando la identidad vectorial: $\vec{\nabla}\bullet\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\bullet\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\bullet\operatorname{rot}\vec{G}$ obtenemos:

$$\operatorname{div}\left[\vec{J}(\vec{r}\,')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] = \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\bullet\operatorname{rot}\vec{J}(\vec{r}\,') - \vec{J}(\vec{r}\,')\bullet\operatorname{rot}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

En esta ecuación el primer sumando de la derecha es cero porque $\vec{J}$ no depende de $\vec{r}$ y el segundo también es cero (rotacional de un campo electrostático).

Hemos demostrado así que efectivamente la divergencia de la inducción magnética siempre es nula. Este resultado figura en el resumen de la teoría electromagnética como una de las cuatro ecuaciones de Maxwell y toma el nombre de ley de Gauss para el campo inducción magnética.

Por el teorema de la divergencia podemos escribir:

$$\oiint_S \vec{B}\bullet da = \iiint \operatorname{div}\vec{B}\,dV = 0 \qquad (26)$$

El flujo de la inducción magnética a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo. Por comparación con el flujo del campo eléctrico, este resultado se interpreta físicamente como prueba de que **no existe monopolo magnético**, es decir, el equivalente magnético de una carga eléctrica.

8.9 POTENCIAL VECTORIAL MAGNETICO

En el capítulo II hemos afirmado que el campo eléctrico $\vec{E}$ siempre se puede obtener tomando el gradiente a un campo escalar, el potencial electrostático. Esta afirmación está basada en la propiedad del campo eléctrico:

$$\text{rot}\,\vec{E} = 0$$

y en la identidad vectorial:

$$\text{rot}\left[\text{grad}\,(escalar)\right] = \vec{0}$$

Análogamente, basándonos en la propiedad del campo inducción magnética

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

y en la identidad vectorial:

$$\text{div}\left[\textbf{rot}\,(\text{vector})\right] = 0$$

podemos afirmar que el campo inducción magnética siempre se puede obtener tomando el rotacional a un campo vectorial.

Definición: Al campo vectorial $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \qquad (27)$$

se le llama **potencial vectorial magnético.**

El potencial vectorial A en términos de la corriente:

Obtengamos ahora una expresión para el potencial vectorial magnético en términos de la distribución de corriente que produce el campo. Para ello tomemos una de las ec. (18), por ejemplo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}\,(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dV'$$

que se puede escribir también:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}\,') \times \text{grad}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV' \qquad (28)$$

y teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\text{rot}\, f\vec{F} = f\,\text{rot}\,\vec{F} - \vec{F}\times\text{grad}\, f$$

podemos escribir:

$$\text{rot}\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{J}(\vec{r}')\right\} = -\vec{J}(\vec{r}')\times\text{grad}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (29)$$

Reemplazando la ec. (29) en la ec. (28) tenemos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \iiint_{V_1}\text{rot}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}dV' \qquad (30)$$

Comparando las ec. (27) y (30) podemos escribir entonces:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (31a)$$

para los casos de corrientes en circuitos filiformes o de corrientes superficiales tendremos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{I\,d\vec{\ell}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (31b)$$

ó

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S'}\frac{\vec{K}\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (31c)$$

donde V', C', S' son las regiones donde existe corriente eléctrica.

La divergencia del potencial vectorial

Aplicando directamente el operador divergencia a cualquiera de las ecs. (31) puede demostrarse que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad (32)$$

Tomemos por ejemplo la divergencia a ambos miembros de la ec. (31b)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' \, d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 \, I'}{4\pi} \oint_{C'} \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (33)$$

Usando la identidad vectorial:

$$\operatorname{div} f\vec{F} = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$$

podemos escribir:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot d\vec{\ell}' + d\vec{\ell}' \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Puesto que $\vec{\nabla}$ opera sobre los $\vec{r}$ y no sobre $\vec{r}'$ tendremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = d\vec{\ell}' \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{\ell}' \qquad (34)$$

donde $\vec{\nabla}'$ opera sobre los $\vec{r}'$. Reemplazando la ec. (34) en la (33)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0 \, I}{4\pi} \oint_{c'} d\vec{\ell}' \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = 0 \qquad \text{L.q.q.d}$$

El Laplaciano del potencial vectorial

Obtengamos ahora una relación entre el potencial vectorial magnético y la densidad de corriente. De la ley del Ampere (ec. 23):

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

y de la definición de potencial vectorial magnético:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Usando la identidad vectorial

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

obtenemos:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}} \qquad (35)$$

Esta es la relación que estábamos buscando. Nótese que cada componente del vector $\vec{A}$ satisface la ecuación de Pöisson:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \tag{35a}$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \tag{35b}$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{35c}$$

Analogía entre el potencial electrostático y el potencial vectorial:

Teniendo en cuenta que el potencial electrostático satisface también la ec. de Pöisson, algunos problemas donde se pida hallar $\vec{A}$ debido a una distribución de corriente, pueden resolverse hallando U debido a una distribución de carga. Las equivalencias son.

$$\rho = \varepsilon_0 \mu_0 J \quad , \quad \sigma = \varepsilon_0 \mu_0 K \quad , \quad \lambda = \varepsilon_0 \mu_0 I \tag{36}$$

El potencial vectorial magnético no es único

No es difícil comprender que cualquier campo

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \tag{37}$$

donde ψ es un campo escalar cualquiera, satisface también la definición de potencial vectorial (ec. 27). Es deseable establecer una convención para especificar mejor cuál es el potencial vectorial magnético.

Nótese que $\vec{A}'$ no satisface la ec. (32) sino más bien:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{A}' = \nabla^2 \psi \tag{38}$$

es decir, la divergencia del potencial vectorial magnético es arbitraria.
Convencionalmente, en magnetostática, para especificar mejor el potencial vectorial magnético se establece que ψ (de la ec. 37) es una constante y por lo tanto la divergencia del potencial vectorial magnético es nula (gauge de Coulomb). En electrodinámica, para campos dependientes del tiempo, se establece otra convención (gauge de Lorentz).

Ejemplo 12

Hallar el potencial vectorial magnético $\vec{A}$ debido a un alambre delgado de longitud infinita por el cual circula corriente I.

Solución

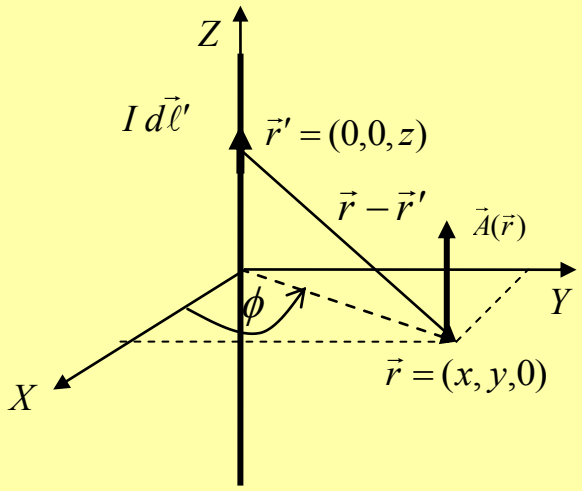


Fig. 14

Supongamos que el alambre tiene longitud $2L$ y queremos hallar **A** en el plano perpendicular que pasa por el centro del alambre.

En la ec. (31b) tendríamos:

$$\vec{r} = (r\cos\phi\ ,\ r\,\mathrm{sen}\,\phi\ ,\ 0)$$

$$\vec{r}' = (0\ ,\ 0\ ,\ z)$$

y por lo tanto:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dz}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}}\hat{k}$$

y evaluando obtendríamos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ \ln\left\{\frac{\left(r^2+L^2\right)^{1/2}+L}{\left(r^2+L^2\right)^{1/2}-L}\right\}.$$

Para el caso propuesto, alambre infinito, $L\to\infty$ nos quedaría

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\infty+\infty}{\infty-\infty}$$

es decir, indeterminado. Por lo tanto, este problema no se puede resolver por integración directa.

Lo resolvemos aquí por analogía con el problema electrostático de "hallar el potencial U debido a un hilo con carga uniforme λ "

$$U \leftrightarrow A_z$$

$$\lambda \leftrightarrow \varepsilon_0\,\mu_0 I$$

Entonces, de

$$U(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

se obtiene:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}\hat{k}}$$

Ejercicio: Hallar $\vec{B}$ a partir de $\vec{A}$.

NOTA: *Por la dificultad que representa hallar* $\vec{A}$ *, no es muy recomendable como método para hallar* $\vec{B}$ *: calcular* $\vec{A}$ *primero y luego tomar* $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ *. La importancia de* $\vec{A}$ *se apreciará mejor cuando los campos* $\vec{E}$ *y* $\vec{B}$ *sean dependientes del tiempo.*

Ejemplo 13

Usando analogías electrostáticas, hallar el potencial vectorial magnético **A** debido a las distribuciones de corriente de los ejemplos 4 y 5.

Solución:

Para el caso del ejemplo 4, el análogo electrostático es el potencial de una superficie con densidad superficial de carga.

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x & , \text{ si } x>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x & , \text{ si } x<0 \end{cases} \Rightarrow U(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x & , \text{ si } x>0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x & , \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Luego:

$$\vec{A}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}x\,\hat{e}_z & , \text{ si } x>0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}x\,\hat{e}_z & , \text{ si } x<0 \end{cases}$$

El análogo electrostático del ejemplo 5 de este capítulo, es el ejemplo 3 del capítulo 2. Para el cual se sabe que:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x & , \text{ si } x>0 \\ -\dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left[1-2e^{x/a}\right]\hat{e}_x & , \text{ si } x<0 \end{cases} \Rightarrow U(x) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0 a}{2\,\varepsilon_0}x & , \text{ si } x>0 \\ \dfrac{\rho_0 a}{2\,\varepsilon_0}\left[2a+x-2a\,e^{x/a}\right]\hat{e}_x & , \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Luego:

$$\vec{A}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 J_0 a}{2}x\,\hat{e}_z & , \text{ si } x>0 \\ \dfrac{\mu_0 J_0 a}{2}\left[2a+x-2a\,e^{x/a}\right]\hat{e}_z & , \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Ejercicio: Verificar que $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ en cada uno de los dos casos.

Ejemplo 14. En la superficie de una esfera de radio R se ha establecido una densidad superficial de corriente descrita por

$$\vec{K}\,(R,\theta) \;=\; K_0 \operatorname{Sen}\theta\, \hat{e}_\phi .$$

Hallar los campos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en puntos dentro y fuera de la esfera.

Solución: Aplicación directa de la ec. (31c) con densidad superficial de corriente

$$\vec{K}(R,\theta) \;=\; K_0\, \hat{e}_z \times \hat{e}_r$$

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi} K_0\, \hat{e}_z \times \oiint_{S'} \frac{\hat{e}_r\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

De la identidad vectorial:

$$\oiint_S f\,(\vec{r}\,)\,\hat{n}\, da \;=\; \iiint_V \vec{\nabla} f\; dV \quad \text{obtenemos:}$$

$$\frac{1}{4\pi} \oiint_{S'} \frac{\hat{e}_r\, da'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \;=\; \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Por analogía con electrostática obtenemos:

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dV' \;=\; \begin{cases} \dfrac{\vec{r}}{3} & , \quad \text{si} \quad r<R \\[2ex] \dfrac{R^3}{3r^2}\hat{e}_r & , \quad \text{si} \quad r>R \end{cases}$$

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \mu_0\; K_0\, \hat{e}_z \times \begin{cases} \dfrac{\vec{r}}{3} & , \quad \text{si} \quad r<R \\[2ex] \dfrac{R^3}{3r^2}\hat{e}_r & , \quad \text{si} \quad r>R \end{cases}$$

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) \;=\; \begin{cases} \mu_0\, K_0\, \dfrac{r}{3} \operatorname{Sen}\theta\, \hat{e}_\phi & , \quad \text{si} \quad r<R \\[2ex] \mu_0\, K_0\, \dfrac{R^3}{3r^2} \operatorname{Sen}\theta\, \hat{e}_\phi & , \quad \text{si} \quad r>R \end{cases}$$

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,) \;=\; \begin{cases} \dfrac{2}{3}\mu_0\, K_0\, \hat{e}_z & , \quad \text{si} \quad r<R \\[2ex] \mu_0\, K_0\, \dfrac{R^3}{3r^3}\left(2\operatorname{Cos}\theta\, \hat{e}_r + \operatorname{Sen}\theta\, \hat{e}_\theta\right) & , \quad \text{si} \quad r>R \end{cases}$$

8.10 APROXIMACIÓN DIPOLAR DEL CAMPO MAGNÉTICO

Dada una distribución de corriente, $I, \vec{J}$ ó $\vec{K}$, es siempre posible obtener el potencial vectorial magnético usando alguna de las ecs. (31); pero las integrales que se presentan no siempre son sencillas. Para casos de circuitos o distribuciones de corriente ubicados en una pequeña región del espacio y cuando sólo se necesita calcular los campos $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en puntos alejados de la corriente puede resultar más conveniente evaluar sólo la aproximación dipolar de los campos $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

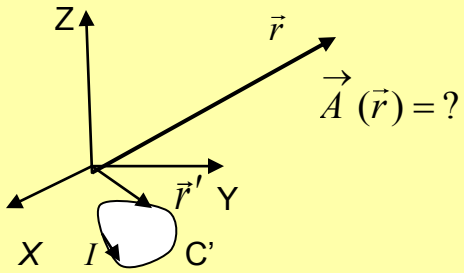


Fig. 15 Calculemos $\vec{A}$ en untos muy alejados del circuito C'

Para obtener dicha aproximación supongamos que se tiene un circuito filiforme de corriente. El potencial vectorial magnético es, según ec. (31b):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Para puntos muy alejados ($r >> r'$) podemos escribir:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\,\vec{r}\bullet\vec{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\bullet\vec{r}'}{r^2} + \ \ldots\right) \qquad (39a)$$

Reemplazando (39a) en (31b) tenemos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\oint_{C'} d\vec{r}' + \frac{1}{r^3}\oint_{C'} (\vec{r}\bullet\vec{r}')\,d\vec{r}' + \ \ldots\right\} \qquad (39b)$$

El primer sumando en el segundo miembro de (39b) es cero y para ver qué sucede con el segundo sumando, obsérvese que:

$$(\vec{r}'\bullet\vec{r})\,d\vec{r}' = (\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{r} + \vec{r}'\,(\vec{r}\bullet d\vec{r}') \qquad (39c)$$

$$(\vec{r}'\bullet\vec{r})\,d\vec{r}' = d\left[\vec{r}'\,(\vec{r}\bullet\vec{r}')\right] - \vec{r}'\,(\vec{r}\bullet d\vec{r}') \qquad (39d)$$

luego:

$$(\vec{r}'\bullet\vec{r})\,d\vec{r}' = \frac{1}{2}\left[(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{r}\,\right] + \frac{1}{2}\,d\left[\vec{r}'\,(\vec{r}\bullet\vec{r}')\right] \qquad (39e)$$

Reemplazando (39e) en (39b) se obtiene:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\oint_{C'} \frac{(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{r}}{2r^3} + \oint_{C'} \frac{d\left[\vec{r}'(\vec{r}\bullet\vec{r}')\right]}{2r^3}\right\} \tag{39f}$$

El segundo sumando del segundo miembro de (39f) es nulo porque se integra un diferencial completo sobre una trayectoria cerrada. Teniendo en cuenta que $\vec{r}$ puede salir de la integral tendremos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{I}{2}\oint_{C'} \vec{r}'\times d\vec{r}'\right\}\times\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{39g}$$

Recordando la definición de momento dipolar magnético, la ec. (39g) puede reescribirse en la forma:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}} \tag{40}$$

Esta es la aproximación dipolar para el campo potencial vectorial magnético y tomándole el rotacional obtendremos la aproximación dipolar del campo inducción magnética del circuito C_1.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \tag{41}$$

Usando la identidad vectorial: $\operatorname{rot}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{F}\operatorname{div}\vec{G} - \vec{G}\operatorname{div}\vec{F} + \left(\vec{G}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \left(\vec{F}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{G}$

donde $\vec{F} = \vec{m} = \text{cte.}$, tenemos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-(\vec{m}\bullet\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}\right\} \tag{42}$$

El segundo sumando del segundo miembro es cero siempre porque no nos interesa el origen sino puntos alejados del circuito; luego:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m}\bullet\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{43}$$

Efectuando las operaciones componente por componente:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3(\vec{m}\bullet\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right\}} \tag{44}$$

Esta es la aproximación dipolar del campo inducción magnética debido al circuito C'. Nótese la analogía con la expresión para el campo eléctrico de un dipolo eléctrico ubicado en el origen de coordenadas.

8.11 EL POTENCIAL ESCALAR MAGNETICO

La ley de Ampere en su forma diferencial, ec. (23), para regiones donde la densidad de corriente, **J** es nula puede escribirse:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$$

Esto significa que en dichas regiones la inducción magnética es un campo vectorial conservativo, y por lo tanto, podemos definir un campo escalar de cuyo gradiente se puede obtener $\vec{B}$.

Definición: Al campo escalar U^* tal que:

$$\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} U^* \qquad (45)$$

se le llama potencial escalar magnético.

Puesto que la divergencia de $\vec{B}$ siempre es nula, ec. (24), deducimos que el potencial escalar magnético cuando $\vec{J} = 0$ satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 U^* = 0 \qquad (46)$$

Esta ecuación se usa como fundamento para resolver problemas de magnetostática en forma análoga a como se resolvieron problemas de electrostática en los capítulos III y V. Se necesitan como datos condiciones de frontera adecuadas, de Dirichlet o de Neumann. Este método se usa, sobre todo, cuando se tienen problemas que involucran materiales con diferentes propiedades magnéticas y se estudiarán en el próximo capítulo. Por ahora sólo presentaremos dos situaciones.

Potencial escalar magnético debido a un dipolo magnético.

Con ayuda de la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \bullet \vec{G}) = (\vec{F} \bullet \vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G} \bullet \vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F} \times \operatorname{rot} \vec{G} + \vec{G} \times \operatorname{rot} \vec{F}$$

la ec. (43), que da el campo inducción magnética en puntos $\vec{r}$ debido a un dipolo magnético ubicado en el origen, se escribirá:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad}\left(\vec{m} \bullet \frac{\vec{r}}{r^3}\right) \qquad (43a)$$

Comparando (43a) con (45) podemos decir que el potencial escalar magnético del dipolo magnético ubicado en el origen es:

$$U^*(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \bullet \vec{r}}{4\pi r^3} \tag{47}$$

y si el dipolo está en una posición $\vec{r}'$:

$$\boxed{U^*(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3}} \tag{47a}$$

Potencial escalar magnético debido a un circuito filiforme con corriente I

Cuando queremos calcular el campo U^* en puntos no muy alejados de un circuito C, de dimensiones finitas y corriente I, no podemos considerar el circuito como un dipolo. Una expresión sencilla para el potencial escalar magnético se puede obtener razonando de la siguiente manera:

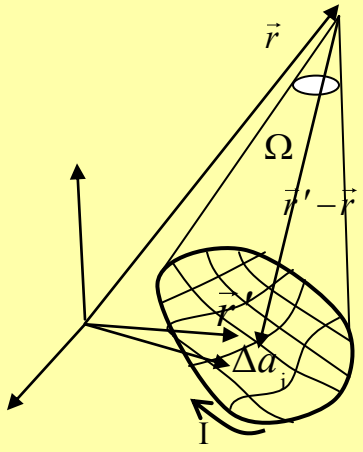


Fig. 16 El potencial escalar magnético debido a un circuito filiforme depende del ángulo sólido Ω .

Partamos una superficie S limitada por el circuito C en elementos diferenciales Δa_i. Podemos imaginar que el borde de cada uno de estos elementos es recorrido por una corriente I en el mismo sentido que la corriente en C. El momento dipolar de cada elemento Δa_i es:

$$\Delta \vec{m}_i = I \, \Delta a_i \, \hat{n}$$

y si el número de elementos se hace infinito podemos escribir:

$$d\vec{m} = I \, da' \, \hat{n} = I \, da'$$

y el potencial escalar magnético, dU^*, que crea cada uno de estos elementos en $\vec{r}$ es:

$$dU^* = -\frac{I \, da' \;\; \hat{n} \bullet (\vec{r}' - \vec{r})}{4\pi \left| \vec{r}' - \vec{r} \right|^3}$$

Si tomamos origen de coordenadas en el punto $\vec{r}$, la ec. anterior se escribirá:

$$dU^* = -\frac{I\, d\vec{a} \bullet \vec{r}'}{4\pi r'^3}$$

El potencial escalar magnético, en el punto $\vec{r}$, debido a todo el circuito es:

$$U^*(\vec{r}) = -\frac{I}{4\pi}\iint_S \frac{d\vec{a} \bullet \vec{r}'}{r'^3} = -\frac{I}{4\pi}\Omega \qquad (48)$$

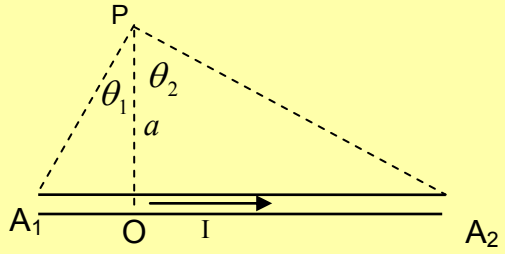
donde Ω es el ángulo sólido con que se observa el circuito C desde el punto $\vec{r}$.

PROBLEMAS

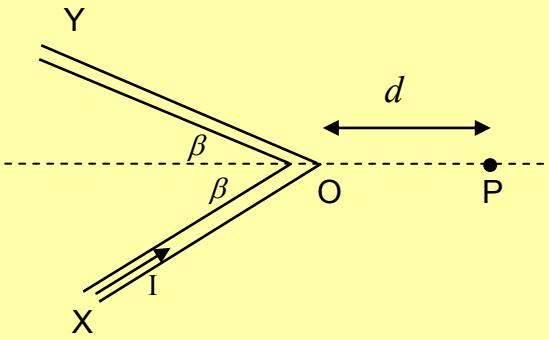
1. Demostrar que si en una región del espacio existe un campo inducción magnética, podemos determinar su valor en un punto P midiendo las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ sobre una partícula cargada cuando ésta tiene velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente, ($\vec{v}_1$ perpendicular a $\vec{v}_2$). El valor del campo $\vec{B}$ es:

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{v}_1}{q\, v_1^2} + \frac{(\vec{F}_2 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)}{q\, v_1^2\, v_2^2}\, \vec{v}_1$$

2. Calcular el campo inducción magnética debido a un segmento A_1A_2, con corriente estacionaria I, en un punto P situado a una distancia a del alambre. Dé sus resultados en términos de θ_1 y θ_2.

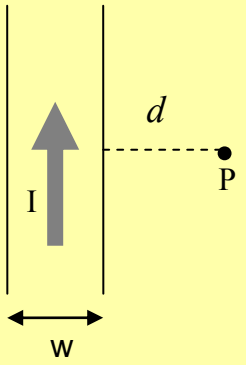


3. Un conductor XOY tiene la forma de dos semirrectas que hacen en O un ángulo 2β. Este está recorrido en el sentido XOY por una corriente de intensidad I. Evaluar el campo inducción magnética en un punto P de la bisectriz del ángulo XOY a la distancia d de O.



4. a) Dé una expresión para el campo inducción magnética en puntos del eje perpendicular de un circuito en forma de polígono regular plano de n lados y de longitud ℓ por el cual circula corriente I; b) manteniendo el perímetro del circuito constante suponga que n tiende a infinito y observe como la expresión para el campo $\vec{B}$ se aproxima al campo de una espira circular.

5. Se tiene una franja delgada de metal, muy larga, de anchura w, por la cual circula corriente I a lo largo de su longitud; a) Halle el campo inducción magnética, $\vec{B}$, a una distancia d del borde más próximo en el plano de la franja; b) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud sobre un alambre infinito con corriente I' paralelo a la longitud de la franja y que dista d del borde más próximo?



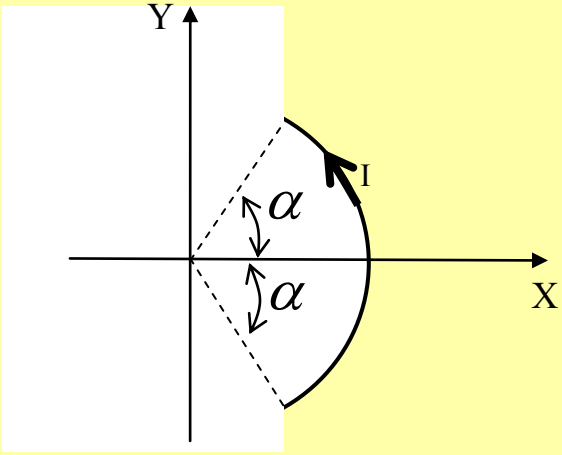
6. Sobre una cáscara esférica de material no magnético y de radio a se enrollan *N* vueltas de un alambre muy fino de tal manera que las espiras están muy cerca una de la otra. Si la corriente del alambre es I, halle el campo inducción magnética en el centro de la esfera.

7. Un disco de radio a con densidad superficial de carga σ gira con velocidad angular ω alrededor del eje perpendicular que pasa por su centro. Hallar el campo inducción magnética en puntos del eje.

8. La superficie lateral de un cilindro circular recto de longitud L y radio a tiene una distribución superficial uniforme de carga σ. Si el cilindro gira con velocidad angular constante, ω, respecto a su eje central ¿Cuál es el campo inducción magnética en puntos del eje?. Compare su resultado con el del ejemplo 3.

9. Una esfera de radio a está polarizada uniformemente con polarización **P** y se la hace girar con velocidad angular constante, ω, respecto a un eje paralelo a **P** que pasa por el origen. Hallar el campo inducción magnética en el centro de la esfera.

10. La corriente I mostrada en la figura circula a lo largo de un arco de circunferencia que está en el plano *XY* y tiene centro de curvatura en el origen. Encontrar $\vec{B}$ en cualquier punto del eje Z. Verifique su resultado mostrando que se reduce al del ejemplo 2 bajo las condiciones apropiadas.



11. Dos espiras circulares, cada una de radio a, están en planos paralelos al plano *XY* y están centradas en el eje Z, separadas una distancia $2d$. Cada una transporta corriente I que circula en el mismo sentido. Escoger origen de coordenadas en el punto medio del sistema y**:**

a) Dar una expresión para $\vec{B}$ en puntos del eje,

b) ¿Cuál es el valor de $\vec{B}$ en el origen?,

c) Demostrar que dB_z/dz se anula en el punto medio,

d) Demostrar que la segunda derivada de B_z también se anula en el origen cuando $d = \frac{a}{2}$;

e) ¿Cuál es el valor de $B_z(0)$ bajo estas condiciones?

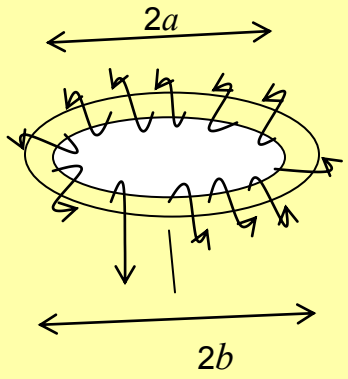
f) Demostrar que la tercera derivada de B_z también se anula en el origen.

(Esta distribución de corrientes es conocida en los laboratorios de Física como las bobinas de Helmholtz, para producir campos magnéticos uniformes).

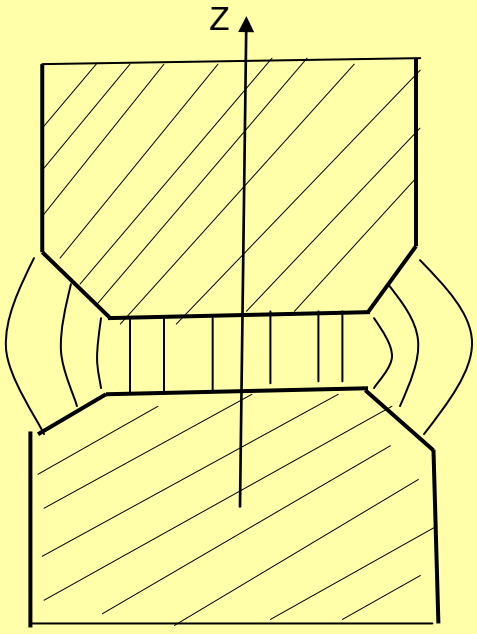
12. Calcular la componente axial del campo inducción magnética, $\vec{B}$, en el centro de una hélice de 2N vueltas, de radio R, y de longitud $2H$, la cual transporta corriente estacionaria I .

13. La inducción magnética en puntos del eje de un solenoide circular de radio a y longitud L con corriente I se ha obtenido en el ejemplo 3. Utilice el hecho de que $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ para obtener una expresión aproximada para la componente B_ρ que sea válida en puntos muy próximos al eje.

14. Un toroide se enrolla uniformemente como se muestra en la figura adjunta; tiene N vueltas de alambre por el que pasa una corriente I. El radio interior del toroide es a y el externo b. Dé una expresión para la inducción magnética en puntos internos del bobinado toroidal.



15. La componente vertical de la inducción magnética entre las caras polares de un acelerador de partículas está dado por: $B_z = B_z(r, z)$ donde r es la distancia al eje de las caras polares. Si B_z es una función decreciente de r, demuéstrese que las líneas de inducción magnética se encorvan hacia fuera como se ilustra en la figura adjunta independientemente de que el polo superior sea un polo norte o polo sur. Sugerencia: Usar el hecho de que $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{0}$ y que $B_\rho = 0$ en el plano medio.



16. Se tienen dos planos paralelos infinitos conductores, separados una distancia d. Digamos que un plano coincide con $x = 0$ y el otro con $x = d$. Por ellos circula una densidad superficial de corriente: $\vec{K} = K\,\hat{e}_z$ y $\vec{K} = -K\,\hat{e}_z$, respectivamente. Hallar el campo inducción magnética entre las placas y fuera de ellas.

17. Para un medio homogéneo, isotrópico, no magnético, de conductividad g, en el que hay corrientes estacionarias, demuéstrese que $\vec{B}$ satisface la ecuación vectorial de Laplace: $\nabla^2 \vec{B} = 0$

18. Por un anillo circular de radio a fluye una corriente I. Un dipolo magnético de momento dipolar m se coloca a lo largo del eje del anillo en un punto a una distancia d del centro. Demostrar que la fuerza que actúa sobre el circuito es:

$$\vec{F} = \frac{3}{2}\mu_0 I\, m\, a^2\, d\left(a^2 + d^2\right)^{-5/2}\hat{k}$$

19. a) Sea S una superficie abierta limitada por la curva C, mostrar que:

$$\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{a}$$

donde $\vec{A}$ es el potencial vectorial magnético y $\vec{B}$ es la inducción magnética.

b) Un conductor cilíndrico tiene radio interno R_1 y radio externo R_2 y a lo largo de su longitud circula una corriente I uniformemente distribuida sobre su sección transversal. Hallar el campo $\vec{B}$ en las regiones $r > R_2$, $R_1 < r < R_2$ y $r < R_1$.

c) Por la simetría, el potencial vectorial $\vec{A}$ debe tener el mismo valor en todo punto sobre el eje del cilindro, sea $\vec{A}_0$ éste valor. Usar el resultado de (a) con una curva C conveniente y hallar $\vec{A}$ para $r > R_2$ y $R_1 < r < R_2$.

20. Encontrar el potencial vectorial magnético para la distribución de corriente del ejemplo 10.

21. Encontrar el potencial vectorial magnético debido a dos alambres infinitos paralelos con corriente I en sentidos opuestos, los cuales están separados una distancia d.

22. Un alambre conductor muy delgado y un cilindro conductor hueco de radio b están dispuestos coaxialmente. Por ambos circula corriente I en uno y otro sentido. Hallar $\vec{A}$ en la región $r < b$.

23. Calcular la componente axial del potencial vectorial magnético $\vec{A}$ en el centro de una hélice de 2N vueltas, de radio R, y de longitud 2H, con corriente I.

24. Dos dipolos $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ están en el mismo plano; $\vec{m}_1$ se fija pero $\vec{m}_2$ puede girar libremente respecto a su propio centro. Demuéstrese que el torque sobre $\vec{m}_2$ será cero cuando:

$$\mathrm{Tg}\theta_1 = -2\,\mathrm{Tg}\theta_2$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos entre $\vec{r}$ y $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ respectivamente. ($\vec{r}$ es el vector desplazamiento de $\vec{m}_1$ a $\vec{m}_2$).

25. a) Demuestre que el potencial escalar magnético para puntos del eje de una espira circular de radio a con corriente I es:

$$U^* = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

(b) Desarrolle esta fórmula según el binomio de Newton para obtener una expresión válida para $z > a$.

(c) Teniendo en cuenta que U^* satisface la ec. de Laplace, use el resultado anterior para obtener $U^*(r,\theta)$ en la región $r > a$.

d) Repita las partes (b) y (c) para la región $r < a$.

e) Obtenga B_r y B_θ en cualquier punto del espacio.

CAPITULO 9

MAGNETOSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES

9.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos estudiado los campos magnéticos en el vacío producidos por cargas en movimiento. En este capítulo estudiaremos el campo magnético en el interior de cualquier medio material. La clave de este capítulo es comprender que el campo magnético **B** está relacionado con sus fuentes por la ley de Biot y Savart exactamente como en el vacío (ecuaciones 18 de capítulo anterior). La diferencia está en que ahora existe una nueva fuente de **B**. Esa nueva fuente es la magnetización de los materiales. Aprenderemos a describir los efectos de la magnetización en términos de dos nuevos conceptos: corrientes de magnetización y cargas de magnetización. Es importante mencionar que necesitaremos la introducción de un campo auxiliar: el campo intensidad magnética **H**.

9.2 MAGNETIZACIÓN

Se dice que un material está magnetizado cuando las corrientes electrónicas dentro de sus propios átomos hacen que cada elemento de volumen dV' tenga un momento dipolar magnético $d\vec{m}$. La cantidad física que caracteriza a un material magnetizado es la magnetización definida por:

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}\,')dV' \tag{1}$$

El origen físico de la magnetización es múltiple, tiene que ver con la interacción de campos externos con el movimiento orbital de los electrones dentro de los átomos (diamagnetismo) así como con el spin electrónico (paramagnetismo), o con la llamada interacción de intercambio spin-spin (en los materiales ferromagnéticos).

9.3 CAMPO B DEBIDO A UN MATERIAL MAGNETIZADO: corrientes de magnetización

Un material magnetizado produce un campo magnético **B** en cualquier punto del espacio, tanto dentro del material como fuera. Para calcular este campo, comenzamos calculando el potencial vectorial magnético **A**. El razonamiento es análogo al que seguimos en el capítulo 5 para hallar el campo eléctrico de un material polarizado. En aquella oportunidad encontramos primero una expresión para el campo en puntos externos y luego demostramos que la misma expresión es válida para puntos internos. Ahora abreviaremos y encontraremos una sola expresión válida tanto para puntos dentro como fuera del material magnetizado.

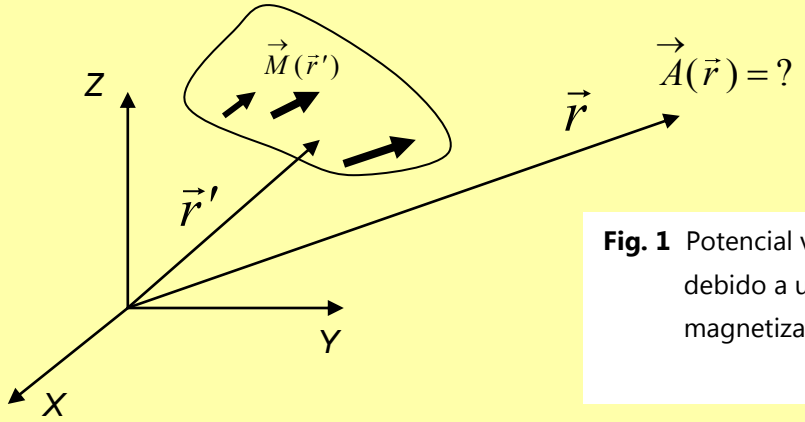


Fig. 1 Potencial vectorial magnético debido a un material magnetizado.

De acuerdo con la ec. (40) del capítulo 8, cada elemento de volumen del material magnetizado ubicado en $\vec{r}\,'$ producirá una contribución al potencial vectorial magnético en $\vec{r}$ expresada por:

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

Por lo tanto, el potencial vectorial magnético originado por todo el material magnetizado será:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \qquad (2)$$

donde V' es el volumen ocupado por el material magnetizado.

Con ayuda del análisis vectorial podemos transformar la ec. (2) en una expresión del potencial vectorial en términos de dos nuevos conceptos: densidad de corriente de magnetización y densidad de corriente superficial de magnetización. Para ello comenzamos transformando la ec. (2) en:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{M}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \quad . \tag{2a}$$

A su vez, usando la identidad vectorial $\vec{\nabla} \times f\vec{F} = f\vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \times \vec{\nabla} f$, esta ecuación, puede escribirse en la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \left[\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,') \right] dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{\nabla}' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] dV'$$

y considerando la identidad vectorial: $\iiint \operatorname{rot} \vec{F}\, dV = \oiint d\vec{a} \times \vec{F}$ se tiene:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \left[\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,') \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S'} \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] da'$$

Definiendo respectivamente ***densidad de corriente de magnetización*** y ***densidad de corriente superficial de magnetización***:

$$\vec{J}_M(\vec{r}\,') = \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,') \qquad \vec{K}_M(\vec{r}\,') = \vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{n} \;\; ; \;\; \hat{n} \;\; \textit{saliendo del material}$$

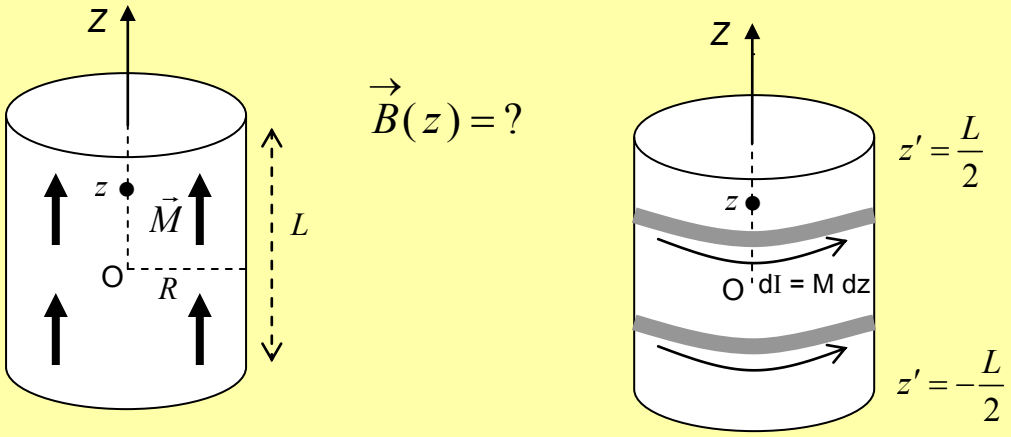
tendremos:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\vec{K}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} da'} \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ y en particular las relaciones entre las ecuaciones (18) y (31) del capítulo anterior tendremos la expresión para ***el campo inducción magnética B en términos de las corrientes de magnetización.***

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{J}_M(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \vec{K}_M(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} da'} \tag{4}$$

Ejemplo 1. Hallar el campo inducción magnética **B** debido a un cilindro de radio R y altura L uniformemente magnetizado con magnetización a lo largo del eje, en puntos de su eje dentro del cilindro.



$$\vec{J}_M = \text{rot}\,\vec{M} = \vec{0} \qquad \vec{K}_M = \vec{M}\times\hat{n} \qquad \vec{K}_M = M\,\hat{e}_z\times\hat{e}_\rho \qquad \vec{K}_M = M\,\hat{e}_\phi$$

Fig. 2 El campo inducción magnética debido a un material uniformemente magnetizado es igual al campo de una corriente superficial por la superficie del cilindro como si fuera un solenoide con M reemplazando a NI / L.

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\, M\, R^2}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{d\,z'}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,\hat{k}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\,\vec{M}}{2}\left\{\frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{R^2+\left[\frac{L}{2}+z\right]^2}}+\frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{R^2+\left[\frac{L}{2}-z\right]^2}}\right\};\quad |z|<\frac{L}{2}$$

(comparar este resultado con ejemplo 3 del capítulo 8)

CASO PARTICULAR: CILINDRO INFINITO UNIFORMEMENTE MAGNETIZADO

En el ejercicio anterior, si L tiende a infinito:

$$\vec{B}(z) = \mu_0\,\vec{M}$$

9.4 CAMPO B DEBIDO A UN MATERIAL MAGNETIZADO: cargas de magnetización

También es posible expresar el campo inducción magnética B debido a un material magnetizado en términos de un nuevo concepto que introduciremos ahora: cargas de magnetización. Para ello comenzamos tomando directamente el rotacional a la ecuación (2).

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV'\right\} \tag{5}$$

Transformaremos esta ecuación usando identidades vectoriales. Primero:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\vec{\nabla}\times\left\{\vec{M}(\vec{r}\,')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right\}dV'\right\}$$

Hacemos uso de la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{G}) = (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}) - \vec{G}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$$

para obtener:

$$B = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \tag{5a}$$

donde:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\left[\vec{M}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}\right]\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV' \tag{5b}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\vec{M}(\vec{r}\,')\left[\vec{\nabla}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]dV' \tag{5c}$$

Además, teniendo en cuenta la identidad vectorial

$$\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) + (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\vec{\nabla}\left(\vec{M}(\vec{r}\,')\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)dV'$$

$$\vec{B}_1 = -\mu_0 \vec{\nabla} U^* \tag{5d}$$

donde:

$$U^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{M}(\vec{r}\,') \bullet \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV' \tag{6}$$

es el potencial escalar magnético debido al material magnetiizado.

Por otro lado, teniendo en cuenta que el corchete en el integrando para $\mathbf{B}_2$ (ec. (5c)) es la función delta de Dirac por 4π, se obtiene:

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \iiint_{V'} \vec{M}(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}) \, dV'$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M} \tag{5e}$$

Reuniendo los resultados de las ecuaciones (5a), (5d) y 5e) podemos escribir el campo **B** debido al material magnetizado en la forma:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} U^* + \mu_0 \vec{M} \tag{7}$$

Por analogía con electrostática, capítulo 5, donde el potencial eléctrico se escribió en términos de las cargas de polarización, el potencial escalar magnético debido al material magnetizado (ec. 6) se puede transformar hasta obtener:

$$U^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{Volumen} \rho_M(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_{Superficie} \sigma_M(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} da' \tag{8}$$

donde:

$$\rho_M = -\operatorname{div} \vec{M} \quad \text{y} \quad \sigma_M(\vec{r}\,') = \vec{M} \bullet \hat{n} \quad (\hat{n} \text{ sale del material magnetizado}) \tag{9}$$

son respectivamente las densidades volumétrica y superficial de carga de magnetización.

Ejemplo 2. Hallar el campo inducción magnética **B** debido a un cilindro de radio R y altura L uniformemente magnetizado con magnetización a lo largo del eje, en puntos de su eje dentro del cilindro.

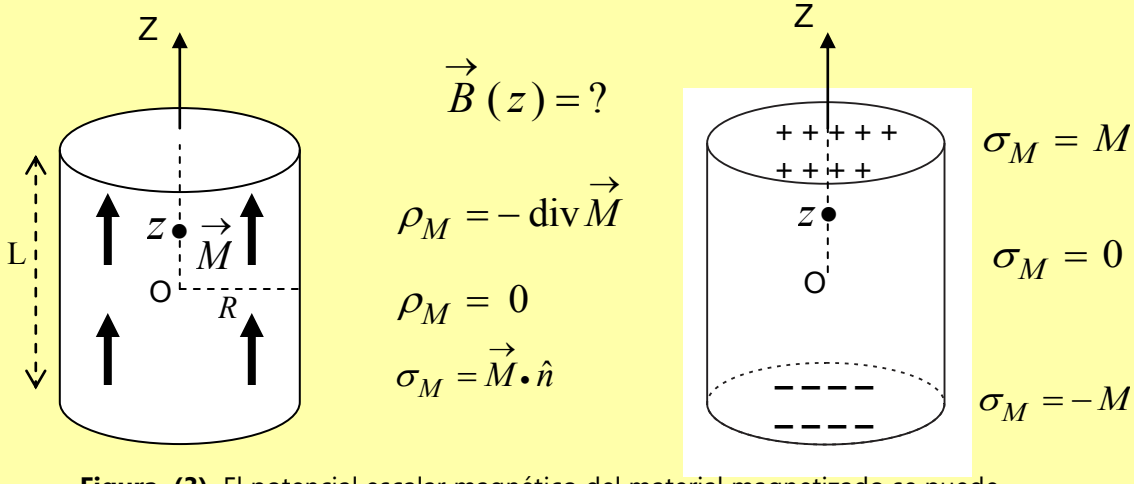


Figura (3) El potencial escalar magnético del material magnetizado se puede escribir en términos de las densidades de carga de magnetización.

Solución:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} U^* \quad \text{y} \quad \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{M}$$

Por comparación con ejemplo 3 de capítulo 5 se tiene

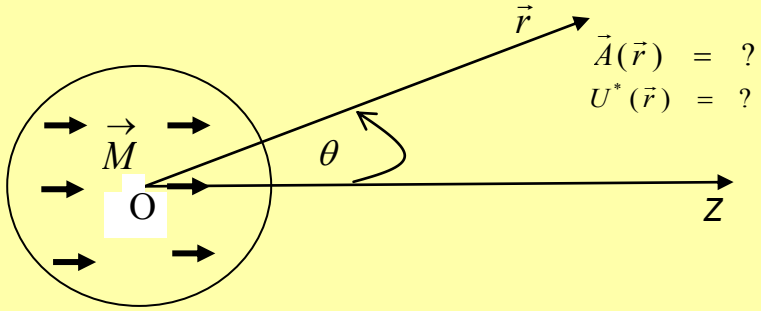
$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2}\left\{-2 + \frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{R^2+\left[\frac{L}{2}+z\right]^2}} + \frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{R^2+\left[\frac{L}{2}-z\right]^2}}\right\}$$

Luego:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2}\left\{\frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{R^2+\left[\frac{L}{2}+z\right]^2}} + \frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{R^2+\left[\frac{L}{2}-z\right]^2}}\right\}; \qquad |z| < \frac{L}{2}$$

Conclusión: Por ambos métodos, corrientes de magnetización o cargas de magnetización, se llega al mismo resultado.

Ejemplo 3. Hallar los campos **A**, U* y **B** debido a una esfera de radio R uniformemente magnetizada con magnetización $\vec{M} = M\,\hat{e}_z$.



Solución: En este caso es más sencillo hallar los campos **A** y U* por integración directa de las ecuaciones (2) y (6).

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}\times\iiint_{V'}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV', \quad U^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\vec{M}\cdot\iiint_{V'}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV'.$$

Relacionando la integral

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV'$$

con el campo eléctrico de una esfera de radio R uniformemente cargada con $\rho = \varepsilon_0$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{3}, \text{ si } r<R \qquad \text{y} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2}\hat{e}_r, \text{ si } r>R$$

Luego:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0\dfrac{M r\,\mathrm{Sen}\,\theta}{3}\hat{e}_\phi, & \text{si } r<R \\ \mu_0\dfrac{M R^3}{3r^2}\mathrm{Sen}\,\theta\,\hat{e}_\phi, & \text{si } r>R \end{cases} \qquad U^*(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{M r\,\mathrm{Cos}\,\theta}{3}, & \text{si } r<R \\ \dfrac{M R^3\,\mathrm{Cos}\,\theta}{3r^2}, & \text{si } r>R \end{cases}$$

El campo **B** se puede hallar tomando el rotacional de **A** ó usando la ecuación (7):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & \text{si } r<R \\ \mu_0\dfrac{MR^3}{3r^3}(2\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\hat{e}_r + \mathrm{Sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta), & \text{si } r>R \end{cases}$$

9.5 EL PROBLEMA GENERAL DE LA MAGNETOSTÁTICA

El problema general de la magnetostática podría enunciarse así: Dados un conjunto de circuitos de corriente estacionaria (corrientes de transporte) y/o un conjunto de materiales de geometría y propiedades físicas conocidas, hallar el campo **B** dentro y fuera de los materiales. De acuerdo con la ley de Biot y Savart y los resultados de las secciones (3) y (4) de este capítulo, siempre es posible y correcto escribir para el campo **B** incógnita cualquiera de las dos siguientes expresiones, donde además podríamos incluir las fuentes superficiales o filiformes

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{J}_M(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV' \qquad (10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{Volumen} \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dV' - \mu_0 \vec{\nabla} U^* + \mu_0 \vec{M} \qquad (11)$$

Sin embargo ninguna de estas dos nos va a llevar a una solución del problema porque tanto las corrientes de magnetización como el potencial escalar magnético dependen de la magnetización y ésta a su vez depende de los valores de **B** dentro del material, es decir de la incógnita del problema.

Los métodos desarrollados por la teoría electromagnética para resolver el problema general planteado se basan en tres ideas que mencionamos aquí y desarrollamos en las tres siguientes secciones:

1) Definición de un campo auxiliar que llamaremos campo intensidad magnética **H**
2) Caracterización magnética de los medios, es decir, establecer relaciones de coexistencia entre los campos **B**, **H** y **M** en el interior de cada material.
3) Establecer las reglas que cumplen los campos **B** y **H** en cada interface entre dos materiales. Esto es lo que se llaman condiciones de frontera.

Después de resolver un problema siguiendo estas tres ideas generales conviene hallar la magnetización, luego las corrientes de magnetización y volver a calcular el campo. Esto significa que la ec (10) o ley de Biot y Savart generalizada puede usarse como una verificación de que todo lo hecho es correcto.

9.6 EL CAMPO INTENSIDAD MAGNÉTICA H: Ley de Ampere

Basados en la ec (11) podemos definir el campo intensidad magnética **H** de cualquier de las tres siguientes maneras equivalentes:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \tag{12a}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{12b}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{Volumen} \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' - \vec{\nabla} U^* \tag{12c}$$

Nos proponemos ahora hallar una expresión para el rotacional del campo auxiliar intensidad magnética **H**:

Así como en el capítulo 8 de la ley de Biot y Savart se obtuvo $Rot\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, ahora, de la ley de Biot y Savart generalizada, (ec (10)) se puede escribir:

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_M \tag{i}$$

De la ec. (12a)

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\text{rot}\,\vec{H} + \mu_0\,\text{rot}\,\vec{M} \tag{ii}$$

De las ecs. (i) y (ii):

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}} \tag{13a}$$

que es equivalente, de acuerdo con el teorema de Stokes, a:

$$\boxed{\oint \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = I} \tag{13b}$$

Las ecs. (13) son las expresiones diferencial e integral de la **ley de Ampere** en presencia de medios.

Es importante notar que de la ec (13b) se deduce que las unidades en el sistema internacional para la intensidad magnética son ampere sobre metro (A/m)**.**

Notar que la divergencia de **H** no es nula. Para resolver problemas de magnetostática, del campo campo **H** generalmente sólo se usa su rotacional (o la ley de Ampere en forma integral)

9.7 CARACTERIZACIÓN MAGNÉTICA DE LOS MATERIALES

Para resolver problemas de magnetostática es necesario conocer las relaciones de coexistencia entre los campos **B**, **H** y **M** dentro de cada material. Usualmente se establece como básica la relación entre **M** y **H** :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{14}$$

χ_m se llama susceptibilidad magnética y en general es una función tensorial que depende de la posición dentro de cada material, así como de los valores de **H**. Sin embargo, para un gran número de materiales (lineales, isotrópicos y homogéneos, L.I.H.) la susceptibilidad se puede expresar por un escalar constante. Si la susceptibilidad magnética es negativa, se dice que el material es **diamagnético**. Si es positiva, el material es **paramagnético**.

Reemplazando la ec. (14) en (12a) se obtiene una relación entre los campos **H** y **B**.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{15}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \tag{16}$$

La función (o constante) μ que relaciona los campos **B** y **H** en un material específico se llama **permeabilidad magnética**.

Suele usarse también para caracterizar magnéticamente a un material la permeabilidad magnética relativa:

$$\mu_r = \mu / \mu_0 = (1 + \chi_m) \tag{17}$$

Algunos valores:

Aluminio $\chi_m = 2{,}1 \times 10^{-5}$ $\mu_r = 1{,}000021$ (paramagnético)

Plata $\chi_m = -2{,}4 \times 10^{-5}$ $\mu_r = 0{,}999976$ (diamagnético)

Los materiales **superconductores** tienen un comportamiento magnético especial, se dice que son diamagnéticos perfectos $\chi_m = -1$ y $\mu_r = 0$. No existe campo **B** dentro de un superconductor (esta propiedad se conoce como Efecto Meissner). En los materiales diamagnéticos y paramagnéticos, la magnetización desaparece si se elimina el campo externo.

La principal característica de los materiales **ferromagnéticos** es la magnetización espontánea, es decir, permanecen magnetizados aún en ausencia de campo externo. Sin embargo, para resolver problemas de magnetostática es conveniente caracterizar a los materiales ferromagnéticos por su curva de magnetización o por su curva de histéresis máxima.

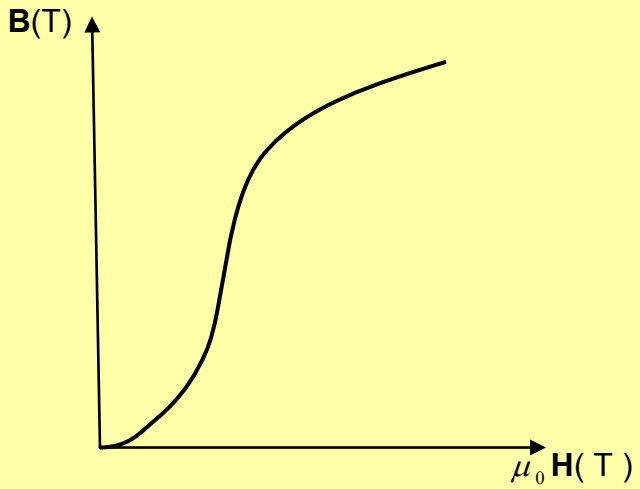


Fig 4. Si un material ferromagnético está inicialmente desmagnetizado y se le aplica un campo externo, la relación **B** vs **H** es la **curva de magnetización**. Cuando **H** es suficientemente grande, la relación es lineal. Se dice que la magnetización ha alcanzado la saturación.

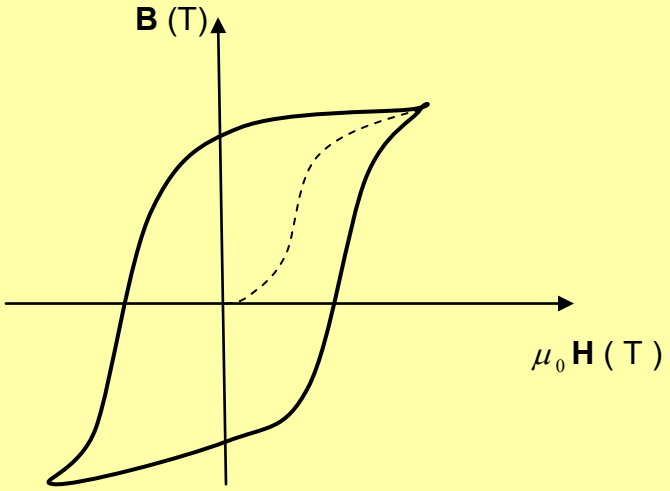


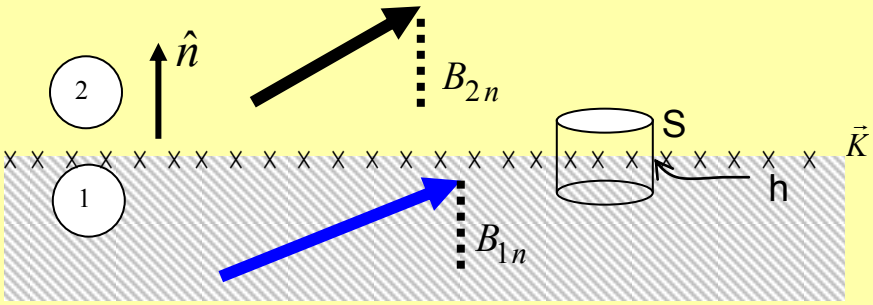
Fig 5. Si la magnetización de un material ferromagnético ha alcanzado la saturación y se disminuye la intensidad magnética aplicada, la curva **B** vs **H** no regresa por la curva de magnetización si no por la curva de histéresis máxima o simplemente: **curva de histéresis**

En algunas aplicaciones un material ferromagnético puede ser considerado como un material paramagnético con permeabilidad infinita, en este caso se suele decir que el material es ferromagnético perfecto. Puesto que **B** es finito y $\mu \to \infty$, dentro de un ferromagnético perfecto **H** es nulo.

9.8 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LOS CAMPOS B Y H

Cada problema de magnetostática involucra generalmente dos o más medios. Por eso es importante conocer las reglas que obedecen los campos **B** y **H** en cada interface entre dos medios.

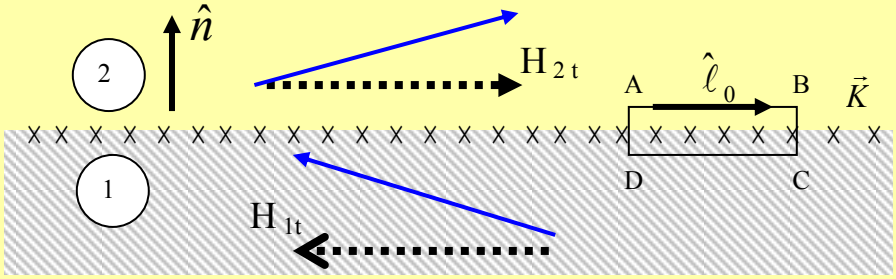
Figura (6) Condición de frontera para campo **B**



Aplicando la ley de Gauss a la superficie S, donde $h \to 0$ se tiene:

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad (18)$$

Figura (7) Condición para el campo **H**



Aplicando la ley de Ampere a la trayectoria ABCDA donde $|BC| \to 0$ se tiene:

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{K} \times \hat{n} \quad \text{ó} \quad \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \qquad (19)$$

(ver problema 16, página 380)

Caso especial 1: medio 1 superconductor

$B_{1n} = 0 \Rightarrow B_{2n} = 0$, entonces el campo $\vec{B}$ al lado 2 de la frontera es tangencial.

Caso especial 2: medio 1 ferromagnético perfecto $\mu_1 \to \infty$

$\mu_1 \to \infty$ y B_1 finito $\Rightarrow \vec{H}_1 = 0$ por lo tanto: $H_{2t} = 0$. El campo $\vec{B}$ al lado 2 de la frontera es perpendicular a la superficie interfase.

Ejemplo 4. Considere que por el plano infinito YZ circula una corriente $\vec{K} = K\,\hat{e}_z$. En la región $-d < x < 0$ hay un bloque rectangular infinito de permeabilidad magnética μ_1 . Y en la región $0 < x < d$ un bloque de permeabilidad μ_2 .

a) Encontrar los campos $\vec{H}, \vec{B}$ y $\vec{M}$ en cada medio

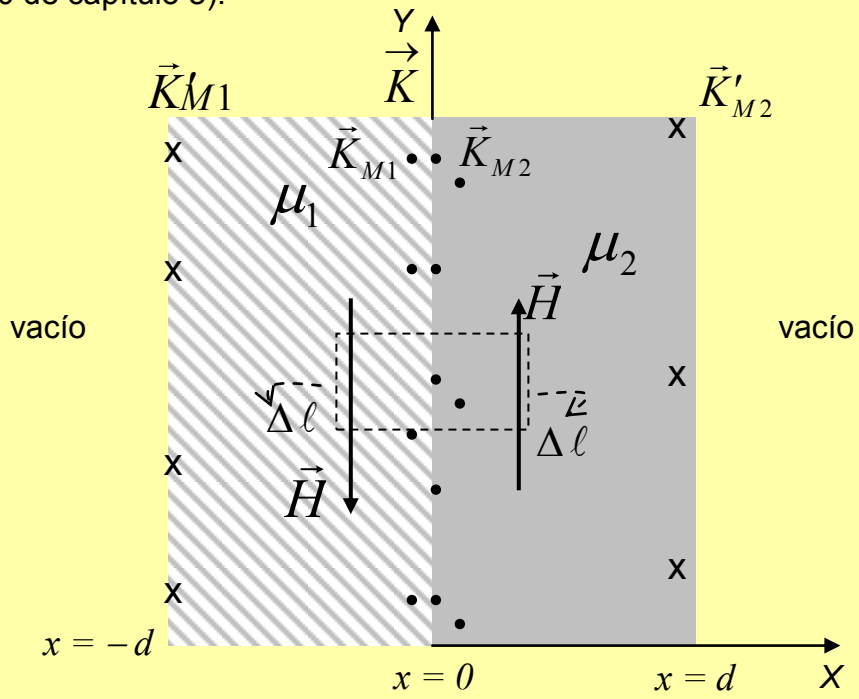
b) Verificar las condiciones de frontera para los campos $\vec{H}$ y $\vec{B}$ en las interfases $x = 0$ y $x = d$

c) Encontrar las corrientes de magnetización

d) Verificar que el campo $\vec{B}$ hallado en la parte (a) en la región $0 < x < d$ es la superposición de los campos producidos por la corriente $\vec{K}$ y todas las corrientes de magnetización encontradas en la parte c como si estuvieran todas en el vacío.

Solución:

El campo $\vec{H}$ es sólo debido a la corriente de transporte ($\vec{K}$ en este caso). Puesto que $\vec{K}$ está uniformemente distribuida en el plano YZ, se puede usar la ley de Ampere para calcular $\vec{H}$ en forma análoga a como se calcula $\vec{B}$ en el vacío (ejemplo 10 de capítulo 8).



a) $2\,H\,\Delta\ell \;=\; K\,\Delta\ell$

$$\vec{H}_1 \;=\; -\frac{K}{2}\,\hat{e}_y\;; \qquad -d \;<\; x \;<0 \qquad \vec{H}_2 \;=\; \frac{K}{2}\,\hat{e}_y\;; \qquad 0 \;<\; x \;<d$$

$$\vec{H}_{\text{vacío}} \;=\; \mp\frac{K}{2}\,\hat{e}_y\;; \qquad x \;<-d \;\text{ y }\; x \;>d$$

$$\vec{B}_1 = \;-\,\mu_1\,\frac{K}{2}\,\hat{e}_y \qquad \vec{B}_2 = \;\mu_2\,\frac{K}{2}\,\hat{e}_y \qquad \vec{B}_{\text{vacío}} \;=\; \mp\,\mu_0\,\frac{K}{2}\,\hat{e}_y$$

$$\vec{M}_1 \;=\; -\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{K}{2}\,\hat{e}_y \qquad \vec{M}_2 \;=\; \left(\frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{K}{2}\,\hat{e}_y \qquad \vec{M}_{\text{vacío}} \;=\; 0$$

b) Efectivamente se cumplen las condiciones de frontera en $x \;=0$ porque:

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} \;=\; \vec{K}\times\hat{e}_x \;\;;\;\; B_{2n} \;=\; B_{1n} \;=\; 0$$

y en $x = d$ porque: $\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} \;=\; \vec{0}\;\;;\;\; B_{2n} \;=\; B_{1n} \;=\; 0$

c) Corrientes de magnetización en $x = d$. (los cálculos en las otras fronteras son similares y los dejamos para que el lector)

$$\vec{K}'_{M2} \;=\; \vec{K}_M\Big|_{x=d} \;=\; \vec{M}_2\times\hat{n} \;=\; -\,\frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_0}\;\frac{\vec{K}}{2}$$

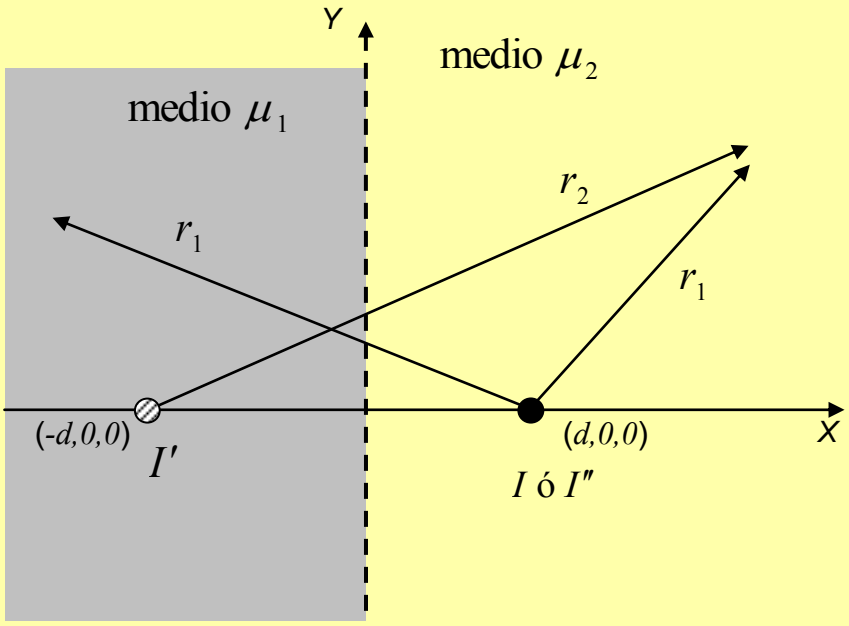
d) **Verificación de la relación entre el campo B y sus fuentes**: En un punto interior del medio μ_2 el campo $\vec{B}_2$ se puede obtener por superposición de la corriente de transporte $\vec{K}$ y de los cuatro planos con corrientes de magnetización. El resultado se puede escribir así:

$$\vec{B}_2 \;=\; \mu_0\,\frac{K}{2}\,\hat{e}_y \;+\; \mu_0\,K_{M2}\;\hat{e}_y$$

$$\vec{B}_2 \;=\; \mu_0\,\frac{K}{2}\left\{1 + \frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_0}\right\}\hat{e}_y$$

que es efectivamente el mismo resultado que en la parte a.

Ejemplo 5. (Imágenes magnetostáticas) En la figura se muestran dos medios semiinfinitos con permeabilidades μ_1 y μ_2 limitados por una superficie plana ($x = 0$). En la recta que pasa por $(d,0,0)$, paralela al eje *Z*, hay una corriente real I. Suponiendo que los campos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ están dados por las expresiones dadas abajo, encuentre los valores de las corrientes imagen I' y I'' para que se satisfagan las condiciones de frontera de los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el plano x = 0.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_1 I''}{2\pi r_1}\hat{e}_{\phi 1} \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r_1}\hat{e}_{\phi 1} + \frac{\mu_2 I'}{2\pi r_2}\hat{e}_{\phi 2}$$

Solución: Escribimos las expresiones para los campos en coordenadas cartesianas en ambos medios:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_1 I''}{2\pi}\frac{\left\{-y\,\hat{i} + (x-d)\,\hat{j}\right\}}{\left\{(x-d)^2 + y^2\right\}}, \qquad x<0$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi}\frac{\{-y\,\hat{i} + (x-d)\,\hat{j}\}}{\{(x-d)^2 + y^2\}} + \frac{\mu_2 I'}{2\pi}\frac{\{-y\,\hat{i} + (x+d)\,\hat{j}\}}{\{(x+d)^2 + y^2\}}, \quad x>0$$

En puntos muy cercanos a la frontera ambos campos son:

$$\vec{B}_1(x=0^-) = \frac{\mu_1 I''}{2\pi}\frac{(-y\,\hat{i} - d\,\hat{j})}{(d^2+y^2)},$$

$$\vec{B}_2(x=0^+) = \frac{\mu_2 I}{2\pi}\frac{(-y\,\hat{i} - d\,\hat{j})}{(d^2+y^2)} + \frac{\mu_2 I'}{2\pi}\frac{(-y\,\hat{i} + d\,\hat{j})}{(d^2+y^2)},$$

De las condiciones de frontera:

$$B_{1n}\Big|_{x=0} = B_{2n}\Big|_{x=0} \Rightarrow \quad \mu_1 I'' = \mu_2 (I + I')$$

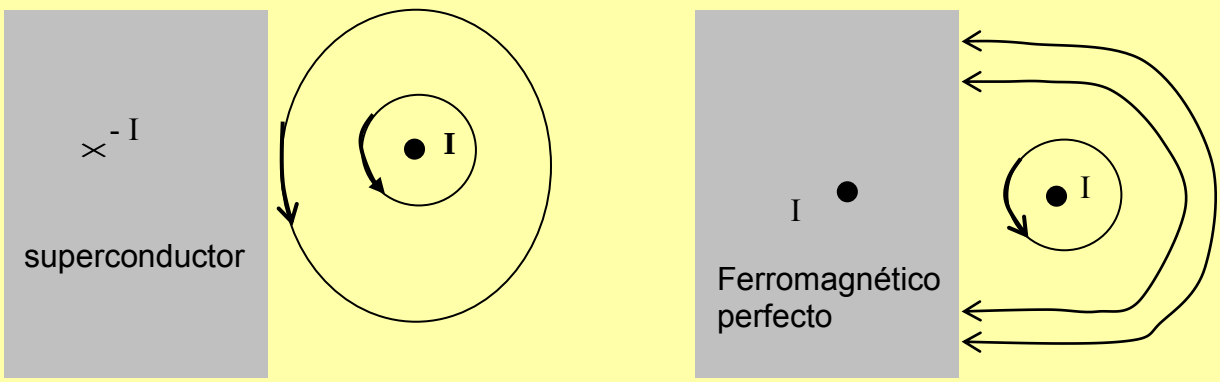
$$H_{1t}\Big|_{x=0} = H_{2t}\Big|_{x=0} \Rightarrow I'' = (I - I')$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas tenemos:

$$I' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I \quad ; \quad I'' = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I$$

Caso especial 1: $\mu_1 = 0$ **superconductor:** $I' = -I$, $I'' = 2I$

Caso especial 2: $\mu_1 \to \infty$ **ferromagnético perfecto** $I' = I$, $I'' = 0$



9.9 PROBLEMAS DE MAGNETOSTÁTICA POR ECUACIÓN DE LAPLACE

En regiones donde no hay corrientes de transporte, (**J = 0**), la ley de Ampere se escribirá:

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{0}$$

Por lo tanto, el campo intensidad magnética se puede escribir como el gradiente del potencial escalar magnético:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} U^*$$

Combinando esta ecuación con

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

en el caso de materiales lineales isotrópicos y homogéneos se tendrá:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = \vec{\nabla} \bullet \mu H = \mu \nabla^2 U^* = 0$$

En general, cuando hay medios no l.i.h. se tiene:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = \vec{\nabla} \bullet (\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 (-\nabla^2 U^* + \vec{\nabla} \bullet \vec{M}) = 0$$

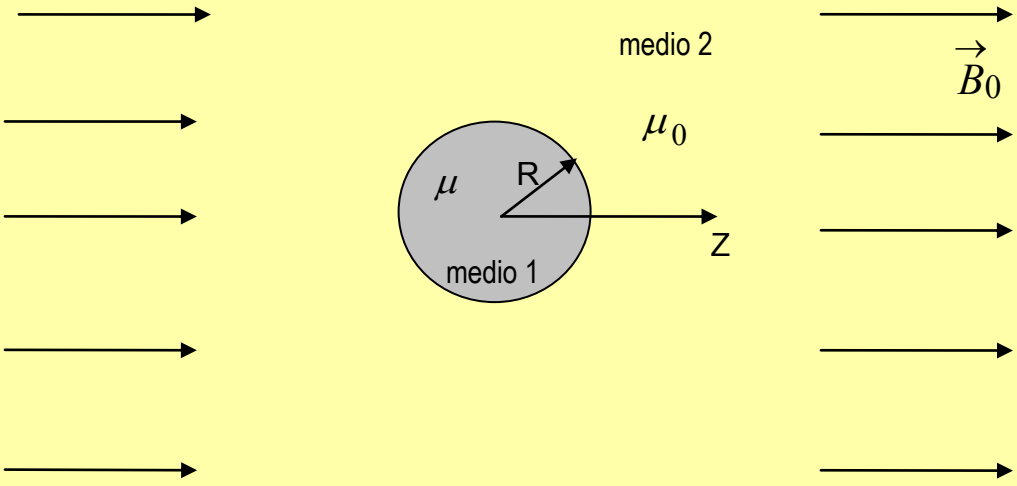
CONCLUSIÓN: En regiones del espacio donde no hay corrientes de transporte y si además se cumple una de las dos siguientes condiciones: (i) el medio es lineal isotrópico, homogéneo o (ii) la divergencia de la magnetización es nula, por ejemplo porque **M** es uniforme, entonces, el potencial escalar magnético satisface la ecuación de Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 U^* = 0} \qquad (20)$$

Esto nos permite resolver problemas de magnetostática en medios materiales en forma análoga a como se resolvieron problemas de electrostática en medios dieléctricos en el capítulo 5. Para ello necesitaremos como datos, el potencial U^* o el campo **B** en la frontera de la región de interés. Para resolver será necesario también aplicar las ecuaciones (18) y (19) en cada interfase entre dos medios.

Ejemplo 6: Una esfera de material L.I.H. (para o diamagnético) de radio R y permeabilidad μ es colocada en un campo $\mathbf{B}_0$ inicialmente uniforme en el vacío. Dé una expresión para **B** en cada medio.

Solución:



Puesto que no hay corrientes de transporte en ningún medio, que los medios son L.I.H, y que hay simetría respecto al eje *Z*:

$$\nabla^2 U_1^* = 0 \qquad \nabla^2 U_2^* = 0$$

$$U^*_1 = U^*_1(r,\theta) \qquad U^*_2 = U^*_2(r,\theta)$$

$$U_1^*(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n\, r^n + B_n\, r^{-(n+1)})\; P_n(\mathrm{Cos}\,\theta)$$

$$U_2^*(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A'_n\, r^n + B'_n\, r^{-(n+1)})\; P_n(\mathrm{Cos}\,\theta)$$

En la frontera exterior, cuando $r \to \infty$ la influencia de la esfera paramagnética en el campo es despreciable y el potencial escalar magnético se puede escribir como:

$$U_2^*(r \to \infty) = -\frac{B_0}{\mu_0} r\,\mathrm{Cos}\theta$$

Considerando que en las fronteras el único polinomio de Legendre involucrado es P_1, podemos decir que en todo el espacio solamente van a permanecer los términos de la serie que tienen a este polinomio. Por lo tanto:

$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1 r \operatorname{Cos}\theta + \frac{\beta_1}{r^2}\operatorname{Cos}\theta$$

$$U_2^*(r,\theta) = \alpha_2 r \operatorname{Cos}\theta + \frac{\beta_2}{r^2}\operatorname{Cos}\theta$$

Las constantes β_1 y α_2 se obtienen a partir de las condiciones de "frontera" en $r = 0$ y $r \to \infty$.

$$U_1(0) = \text{finito} \Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$U_2(r\to\infty) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \operatorname{Cos}\theta \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{B_0}{\mu_0}$$

Ahora, el potencial escalar magnético en cada medio se puede escribir:

$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1 r \operatorname{Cos}\theta \qquad \text{(i)}$$

$$U_2^*(r,\theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \operatorname{Cos}\theta + \frac{\beta_2}{r^2}\operatorname{Cos}\theta \qquad \text{(ii)}$$

Las constantes α_1 y β_2 se obtienen a partir de las condiciones de frontera en $r = R$

$$H_{1t}\Big|_{r=R} = H_{2t}\Big|_{r=R} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial U_1^*}{\partial\theta}\Big|_{r=R} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_2^*}{\partial\theta}\Big|_{r=R} \Rightarrow \boxed{\frac{\beta_2}{R^3} - \alpha_1 = \frac{B_0}{\mu_0}} \qquad \text{(iii)}$$

$$B_{1n}\Big|_{r=R} = B_{2n}\Big|_{r=R} \Rightarrow \mu\frac{\partial U_1^*}{\partial r}\Big|_{r=R} = \mu_0\frac{\partial U_2^*}{\partial r}\Big|_{r=R} \Rightarrow \boxed{\frac{\beta_2}{R^3} + \frac{\mu}{2\mu_0}\alpha_1 = -\frac{B_0}{2\mu_0}} \qquad \text{(iv)}$$

Resolviendo las ecuaciones (iii) y (iv) se obtiene:

$$\alpha_1 = -\frac{3B_0}{\mu+2\mu_0} \qquad \beta_2 = \frac{B_0 R^3}{\mu+2\mu_0}\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)$$

Reemplazando respectivamente en las ecuaciones (i) y (ii) se obtendrá:

$$U_1^*(r,\theta) = -\frac{3B_0}{\mu+2\mu_0} r\,\mathrm{Cos}\,\theta, \quad \text{si} \quad r < R$$

$$U_2^*(r,\theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r\,\mathrm{Cos}\,\theta + \frac{B_0 R^3}{\mu+2\mu_0} \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)}{r^2}\mathrm{Cos}\,\theta; \qquad \text{si} \quad r > R$$

Teniendo en cuenta que los medios son lineales, la ec (7) puede aplicarse en la forma: $\vec{B} = -\mu\vec{\nabla}U^*$, de lo cual se obtendrá:

$$\vec{B}_1(r,\theta) = \frac{3B_0}{1+2\frac{\mu_0}{\mu}}\hat{e}_z, \quad \text{si} \quad r < R \qquad \text{(v)}$$

$$\vec{B}_2(r,\theta) = \vec{B}_0 + \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)}{\left(\frac{\mu}{\mu_0}+2\right)} \frac{R^3}{r^3} B_0\,(2\mathrm{Cos}\,\theta\hat{e}_r + \mathrm{Sen}\,\theta\hat{e}_\theta); \quad \text{si} \quad r > R \qquad \text{(vi)}$$

El problema se puede dar por terminado aquí, sin embargo, es interesante observar que podemos calcular la magnetización dentro del medio L.I.H:

$$\vec{M} = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\left(\frac{3B_0}{\mu+2\mu_0}\right)\hat{e}_z \qquad \text{(vii)}$$

Y puede aplicarse el resultado del ejemplo 3 para calcular los campos U^* y **B** de la esfera uniformemente magnetizada. Se observará que los campos $U_1^*, U_2^*, \vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ de este ejemplo son la superposición del campo $\mathbf{B}_0$ más el campo de la esfera magnetizada. Quedando así verificada la validez de lo establecido por las ecuaciones (10) y (11).

Ejemplo 6a: Para el caso especial del ejemplo 6 en que la esfera esté hecha de un material superconductor ($\mu = 0$), encontrar los campos **B** y **M** dentro y fuera de la esfera.

Solución:

Si en los resultados (v), (vi) y (vii) del ejemplo (6) asignamos a la permeabilidad magnética el valor $\mu = 0$, tendremos respectivamente:

$$\vec{B}_1(r,\theta) = \frac{3\,\mu\,B_0}{\mu + 2\,\mu_0}\,\hat{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{B}_2(r,\theta) = \vec{B}_0 - \frac{1}{2}B_0\,\frac{R^3}{r^3}(2\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\hat{e}_r + \mathrm{Sen}\theta\,\hat{e}_\theta)$$

$$\vec{M} = -\frac{3\,B_0}{2\,\mu_0}\,\hat{e}_z$$

Obsérvese que de acuerdo con el resultado del ejemplo (3), esta magnetización produce dentro de la esfera superconductora un campo $-\vec{B}_0$ que se cancela exactamente con el campo $\vec{B}_0$ producido por fuentes externas. Esta magnetización es equivalente a una densidad de corriente superficial:

$$\vec{K}_M(R,\theta) = -\frac{3\,B_0}{2\,\mu_0}\,\mathrm{Sen}\theta\,\hat{e}_\phi \ .$$

Ejemplo 6b. Para el caso especial del ejemplo 6 en que la esfera esté hecha de un material ferromagnético perfecto $(\mu \to \infty)$, encontrar los campos **B** y **M** dentro y fuera de la esfera.

Solución:

Si en los resultados (v), (vi) y (vii) del ejemplo (6) consideramos que la permeabilidad magnética de la esfera es $\mu \to \infty$, tendremos respectivamente:

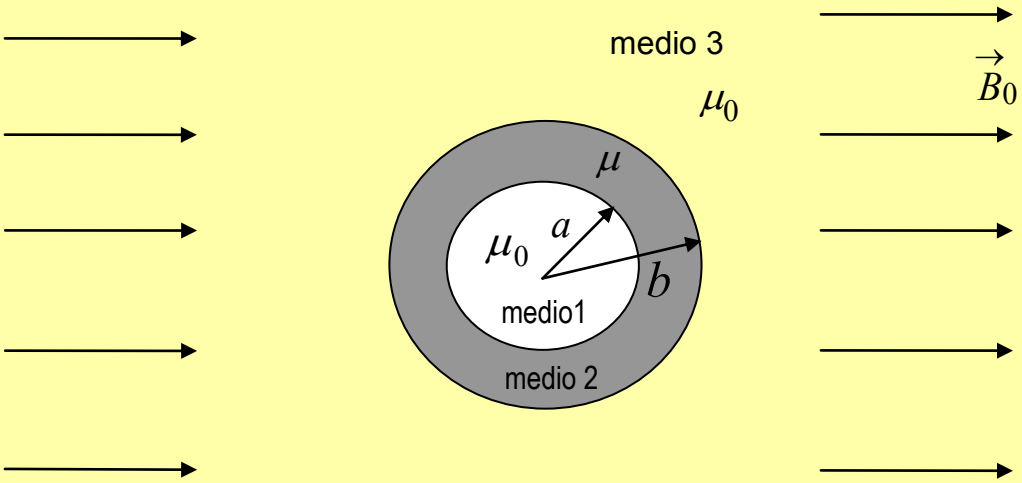
$$\vec{B}_1(r,\theta) = 3\,B_0\,\hat{e}_z$$

$$\vec{B}_2(r,\theta) = \vec{B}_0 + B_0\,\frac{R^3}{r^3}(2\,\mathrm{Cos}\theta\,\hat{e}_r + \mathrm{Sen}\theta\,\hat{e}_\theta)$$

$$\vec{M} = \frac{3\,B_0}{\mu_0}\,\hat{e}_z$$

Obsérvese que de acuerdo con el resultado del ejemplo (3), esta magnetización produce dentro de la esfera de material ferromagnético perfecto un campo $2\vec{B}_0$ que se superpone con el campo $\vec{B}_0$ producido por fuentes externas.

Ejemplo 7 (blindaje magnético). Considere un cascarón esférico de radio interno a y radio externo b de permeabilidad magnética μ colocado en un campo magnético inicialmente uniforme. Calcule el campo en la región $r < a$.



Solución: Por los argumentos expuestos al inicio del problema anterior:

$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1 r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_1}{r^2}\mathrm{Cos}\theta$$

$$U_2^*(r,\theta) = \alpha_2 r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_2}{r^2}\mathrm{Cos}\theta$$

$$U_3^*(r,\theta) = \alpha_3 r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_3}{r^2}\mathrm{Cos}\theta$$

De las condiciones de "frontera" en r = 0 y en $r \to \infty$ se obtienen los valores de β_1 y α_3.

$$\beta_1 = 0 \qquad \alpha_3 = -\frac{B_0}{\mu_0}$$

El potencial escalar magnético en cada región se puede escribir ahora:

$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1 r\,\mathrm{Cos}\theta$$

$$U_2^*(r,\theta) = \alpha_2 r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_2}{r^2}\mathrm{Cos}\theta$$

$$U_3^*(r,\theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_3}{r^2}\mathrm{Cos}\theta$$

Las condiciones de frontera para **B** y **H** en las interfaces $r = a$ y $r = b$:

$$H_{1t}\Big|_{r=a} = H_{2t}\Big|_{r=a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial U_1^*}{\partial \theta}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_2^*}{\partial \theta}\bigg|_{r=a}$$

$$B_{1n}\Big|_{r=a} = B_{2n}\Big|_{r=a} \Rightarrow \quad \mu_0 \frac{\partial U_1^*}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \mu \frac{\partial U_2^*}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

$$H_{2t}\Big|_{r=b} = H_{3t}\Big|_{r=b} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial U_2^*}{\partial \theta}\bigg|_{r=b} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_3^*}{\partial \theta}\bigg|_{r=b}$$

$$B_{2n}\Big|_{r=b} = B_{3n}\Big|_{r=b} \Rightarrow \quad \mu \frac{\partial U_2^*}{\partial r}\bigg|_{r=b} = \mu_0 \frac{\partial U_3^*}{\partial r}\bigg|_{r=b}$$

nos conducen respectivamente al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$-\alpha_1 a^3 + \alpha_2 a^3 + \beta_2 = 0$$

$$\mu_0 \alpha_1 a^3 - \mu \alpha_2 a^3 + 2\mu\beta_2 = 0$$

$$-\alpha_2 b^3 - \beta_2 + \beta_3 = \frac{B_0 b^3}{\mu_0}$$

$$\mu \alpha_2 b^3 - 2\mu\beta_2 + 2\mu_0 \beta_3 = -B_0 b^3$$

De este sistema de ecuaciones se pueden hallar las cuatro constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3$; sin embargo para discutir el campo en la región 1 sólo es necesario evaluar α_1.

$$\alpha_1 = -\left[\frac{9\,\frac{\mu}{\mu_0}}{\left(2\frac{\mu}{\mu_0}+1\right)\left(\frac{\mu}{\mu_0}+2\right) - 2\frac{a^3}{b^3}\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)^2}\right]\frac{B_0}{\mu_0}$$

De las relaciones: $\vec{B}_1 = -\mu_0 \vec{\nabla} U_1^* = \mu_0 \alpha_1 \hat{e}_z$, se obtiene:

$$\vec{B}_1 = \left[\frac{9\,\frac{\mu}{\mu_0}}{\left(2\frac{\mu}{\mu_0}+1\right)\left(\frac{\mu}{\mu_0}+2\right) - 2\frac{a^3}{b^3}\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)^2} \right] \vec{B}_0$$

Si $\mu >> \mu_0$ tendremos:

$$\vec{B}_1 = \left[\frac{9}{2\frac{\mu}{\mu_0}\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)} \right] \vec{B}_0$$

Para los datos numéricos: $a = 0,9\,\mathrm{m}$; $b = 1,0\,\mathrm{m}$; $\mu = 5000\,\mu_0$

$$\vec{B}_1 = 0,0033\,\vec{B}_0$$

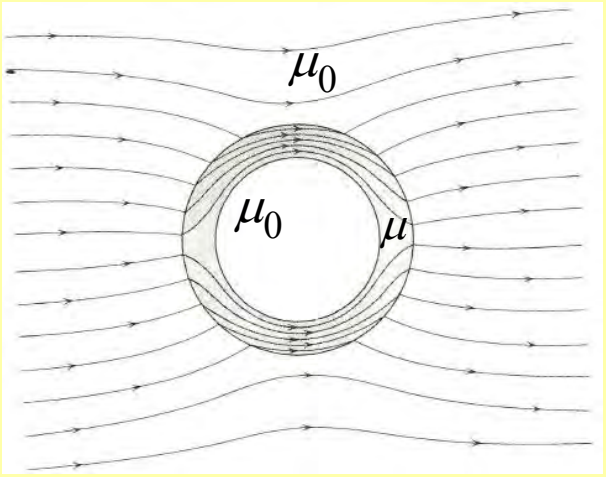
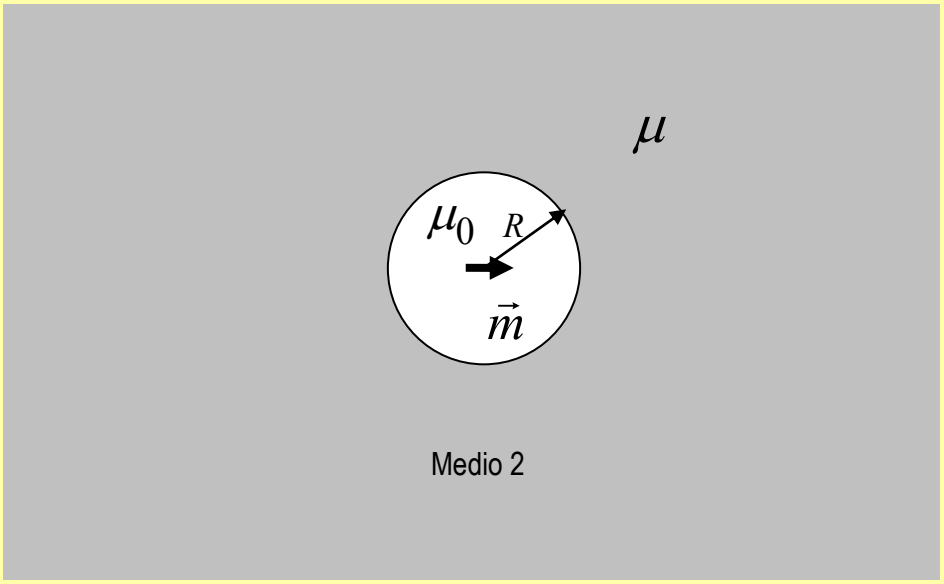


Figura 8 El blindaje con materiales ferromagnéticos funciona debido a que los materiales ferromagnéticos ofrecen menor "resistencia" a las líneas de inducción magnética. Ver también sección 9.10

NOTA El blindaje con materiales ferromagnéticos tiene varias aplicaciones en ingeniería, desde blindar un laboratorio (MSR magnetic shielded room) para realizar medidas de campos magnéticos pequeñísimos como los emitidos por órganos del cuerpo humano (magnetoencefalografía o magnetocardiografía) hasta cubierta de transformadores de potencia para evitar que afecte a los circuitos en la vecindad.

Ejemplo 8. Un dipolo magnético se coloca en el centro de una cavidad esférica de radio R hecha en un material L.I.H. con permeabilidad μ. Hallar el potencial escalar magnético y el campo inducción magnética en cada medio.



Solución:

$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1\, r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_1}{r^2}\mathrm{Cos}\theta \quad ; \qquad \text{si} \quad r < R$$

$$U_2^*(r,\theta) = \alpha_2\, r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{\beta_2}{r^2}\mathrm{Cos}\theta \quad ; \qquad \text{si} \quad r > R$$

Cuando $r \to 0$: $\quad U_1^*(r,\theta) = \dfrac{1}{4\pi}\,\dfrac{m}{r^2}\mathrm{Cos}\,\theta \;\Rightarrow\; \beta_1 = \dfrac{m}{4\pi}$

Cuando $r \to \infty$: $\quad U_2^*(r,\theta) \;\to\; 0 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 0$

$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1\, r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{m}{4\pi}\frac{1}{r^2}\mathrm{Cos}\theta \qquad \text{(i)}$$

$$U_2^*(r,\theta) = \frac{\beta_2}{r^2}\mathrm{Cos}\,\theta \qquad \text{(ii)}$$

Las constantes α_1 y β_2 se obtienen a partir de las condiciones de frontera en $r = R$

$$H_{1t}\Big|_{r=R} = H_{2t}\Big|_{r=R} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial U_1^*}{\partial\theta}\bigg|_{r=R} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_2^*}{\partial\theta}\bigg|_{r=R} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 + \frac{m}{4\pi R^3} = \frac{\beta_2}{R^3}} \qquad \text{(iii)}$$

$$B_{1n}\Big|_{r=R} = B_{2n}\Big|_{r=R} \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial U_1^*}{\partial r}\Big|_{r=R} = \mu \frac{\partial U_2^*}{\partial r}\Big|_{r=R} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 - 2\frac{m}{4\pi R^3} = -\frac{2\mu}{\mu_0}\frac{\beta_2}{R^3}} \quad \text{(iv)}$$

Resolviendo (iii) y (iv)

$$\alpha_1 = \frac{(\mu_0 - 2\mu)}{(2\mu + \mu_0)}\frac{m}{4\pi R^3} \qquad \beta_2 = \frac{3\mu_0}{4\pi(2\mu + \mu_0)}m \qquad \text{(v)}$$

Reemplazando (v) en (i) y (ii):

$$U_1^*(r,\theta) = \frac{2(\mu_0 - \mu)}{(2\mu + \mu_0)}\frac{m}{4\pi R^3} r\,\mathrm{Cos}\,\theta + \frac{m}{4\pi r^2}\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$U_2^*(r,\theta) = \frac{3\mu_0}{4\pi(2\mu + \mu_0)}\frac{m\,\mathrm{Cos}\,\theta}{r^2}$$

Tomando el gradiente:

$$\vec{B}_1(r,\theta) = \frac{2\mu_0(\mu - \mu_0)}{(2\mu + \mu_0)}\frac{\vec{m}}{4\pi R^3} + \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right) \quad ; \quad r < R$$

$$\vec{B}_2(r,\theta) = \frac{3\mu}{4\pi(2\mu + \mu_0)}\frac{\mu_0 m}{}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right) \quad ; \quad r > R$$

$$\vec{M}_2(r,\theta) = \frac{3(\mu - \mu_0)m}{4\pi(2\mu + \mu_0)}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right) \quad ; \quad r > R$$

Ejemplo 8a: Para el caso especial del ejemplo 8 en que el material que rodea al dipolo sea superconductor $(\mu = 0)$, encontrar los campos **B** y **M** dentro y fuera de la esfera. Halle también la densidad de corriente superficial en r = R.

Solución:

$$\vec{B}_1(r,\theta) = -\frac{2\,\mu_0\,\vec{m}}{4\pi R^3} + \frac{\mu_0\,m}{4\pi}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta\right) \quad ; \quad r < R \qquad (*)$$

$$\vec{B}_2\,(r,\theta) = \vec{0}\,; \quad r > R$$

$$\vec{M}_2\,(r,\theta) = -\frac{3\;m}{4\pi}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta\right) \qquad ; \quad r > R$$

$$\vec{K}_M\,(R,\theta) = -\frac{3\;m}{4\pi\,R^3}\;\mathrm{Sen}\,\theta\;\hat{e}_\phi$$

Observar que de acuerdo con el ejemplo 12 del capítulo 8 y el ejemplo 3 de éste, esta corriente de magnetización produce en el medio (2) un campo **B** que anula exactamente al campo del dipolo y en el medio (1) produce el primer sumando de la ec. (*).

Ejemplo 8b. Para el caso especial del ejemplo 8 en que el material que rodea al dipolo sea ferromagnético perfecto $(\mu \to \infty)$, encontrar los campos **B** y **M** dentro y fuera de la esfera. Halle también la densidad de corriente superficial en r = R.

Solución::

$$\vec{B}_1(r,\theta) = \frac{\mu_0\,\vec{m}}{4\pi\,R^3} + \frac{\mu_0\,m}{4\pi}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta\right) \quad ; \quad r < R$$

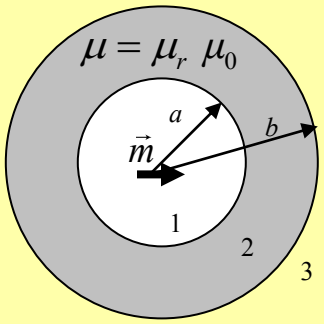
$$\vec{B}_2(r,\theta) = \frac{3\,\mu_0\,m}{8\pi}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta\right) \qquad ; \quad r > R$$

$$\vec{M}_2(r,\theta) = \frac{3\quad m}{8\pi}\left(2\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_r + \frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{r^3}\,\hat{e}_\theta\right) \qquad ; \quad r > R$$

$$\vec{K}_M(R,\theta) = \frac{3\,m}{8\pi}\;\frac{\mathrm{Sen}\,\theta}{R^3}\,\hat{e}_\phi$$

Ejemplo 9. Considere un cascarón esférico de radio interior a y radio exterior b, hecho de un material de permeabilidad magnética μ. Si en el centro del cascarón se coloca un dipolo magnético de momento dipolar $\vec{m} = m\,\hat{e}_z$, halle el campo magnético en la región $r > b$.

Solución



$$U_1^*(r,\theta) = \alpha_1\, r\,\mathrm{Cos}\theta + \frac{1}{4\pi}\frac{m\,\mathrm{Cos}\theta}{r^2}$$

$$U_2^*(r,\theta) = \alpha_2\, r\,\mathrm{Cos}\theta + \beta_2\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r^2}$$

$$U_3^*(r,\theta) = \beta_3\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r^2}$$

Las condiciones de frontera para **B** y **H** en las interfaces $r = a$ y $r = b$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U_1^*}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_2^*}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} \quad\Rightarrow\quad -\alpha_1 a^3 + \alpha_2 a^3 + \beta_2 = \frac{m}{4\pi} \qquad \text{(i)}$$

$$\mu_0\frac{\partial U_1^*}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \mu\frac{\partial U_2^*}{\partial r}\bigg|_{r=a} \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 a^3 - \mu_r\,\alpha_2\, a^3 + 2\,\mu_r\,\beta_2 = \frac{2m}{4\pi} \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U_2^*}{\partial\theta}\bigg|_{r=b} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_3^*}{\partial\theta}\bigg|_{r=b} \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 b^3 + \beta_2 - \beta_3 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

$$\mu\frac{\partial U_2^*}{\partial r}\bigg|_{r=b} = \mu_0\frac{\partial U_3^*}{\partial r}\bigg|_{r=b} \quad\Rightarrow\quad \mu_r\,\alpha_2\, b^3 - 2\,\mu_r\,\beta_2 + 2\beta_3 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

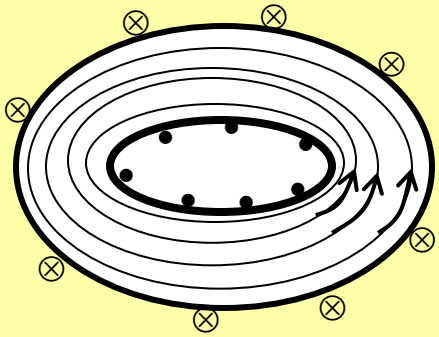
$$U_3^*(r,\theta) = \frac{\beta_3}{r^2}\mathrm{Cos}\theta = \frac{3\,\mu_r m}{4\pi\left\{\dfrac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)(2 - 2\mu_r) + (2\,\mu_r + 1)(\mu_r + 2)\right\}}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r^2}$$

Si la permeabilidad relativa es mucho mayor que 1, usualmente 5000:

$$U_3^*(r,\theta) = \frac{\beta_3}{r^2}\mathrm{Cos}\theta = \frac{3\ m}{4\pi\,\mu_r\left(1 - \dfrac{a^3}{b^3}\right)}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r^2}$$

9.10 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Las líneas de inducción magnética son cerradas (porque no existen monopolos magnéticos). Si además en un sistema magnetostático, estas líneas se concentran en pequeñas regiones del espacio como en un toroide, entonces, el sistema puede ser tratado análogamente a un circuito eléctrico. En particular, la ley de Ampere puede conducirnos a una ecuación similar a la ley de Ohm.



$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = NI$$

$$\oint \frac{B}{\mu} d\ell = NI$$

$$\Phi \oint \frac{d\ell}{\mu A} = NI$$

$$\boxed{fmm = \Re \Phi} \qquad (21)$$

$fmm = NI$ es la corriente total (ampere vuelta) que genera los campos magnéticos y es análoga a la fuerza electromotriz o voltaje en la teoría de circuitos eléctricos. Se llama **fuerza magnetomotriz**.

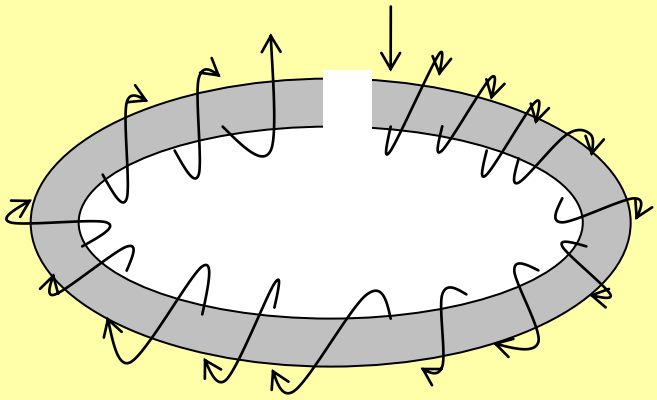
Φ es el **flujo magnético** y es análogo a la corriente eléctrica I en la ley de Ohm.

$\Re = \oint \frac{d\ell}{\mu A}$ es la **reluctancia** del circuito magnético y es equivalente a la resistencia eléctrica.

Se puede hablar de reluctancias en serie y en paralelo como en circuitos eléctricos.

A continuación damos algunos ejemplos. En algunos problemas sencillos no es necesario usar la comparación con circuitos eléctricos. Basta la ley de Ampere, la continuidad de B_n, y la relación B vs H en cada medio que interviene en el problema. La relación B vs H puede ser la curva de magnetización, la curva de histéresis o simplemente el valor de la permeabilidad magnética.

Ejemplo 10. Un anillo de hierro dulce con entrehierro de 1,0 cm está enrollado con un devanado como se muestra en la figura. La longitud media del anillo de hierro es de 20 cm. Su sección transversal es de 4 cm^2 y su permeabilidad relativa, que se supone constante es 3000. Por el devanado de 200 vueltas circula una corriente de 10 A. Halle B y H dentro del anillo y en el entrehierro.



Solución:

Por ley de Ampere: $$NI = H_{fierro}\,\ell_{fierro} + H_{aire}\,\ell_{aire} \qquad \text{(a)}$$

Por condición de frontera en interfase fierro-aire: $$B_{aire} = B_{fierro} = B \qquad \text{(b)}$$

$$H_{fierro} = \frac{B}{3000\,\mu_0} \qquad \text{(c)}$$

$$H_{aire} = \frac{B}{\mu_0} \qquad \text{(d)}$$

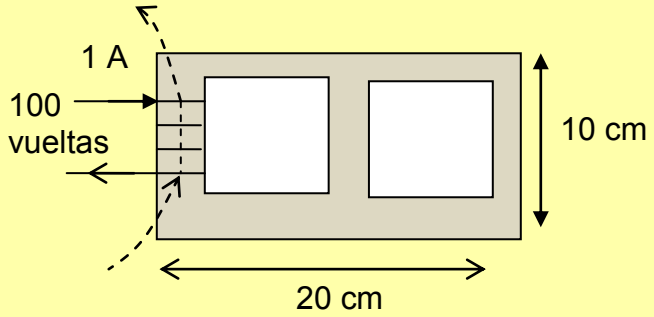
Reemplazando (b), (c) y (d) en (a), y teniendo en cuenta los datos numéricos dados en el enunciado se obtiene:

$$2000 = \frac{B}{\mu_0}\left[\frac{0,2}{3000} + 0,01\right]$$

$$B_{aire} = B_{fierro} \approx 250\,mT$$

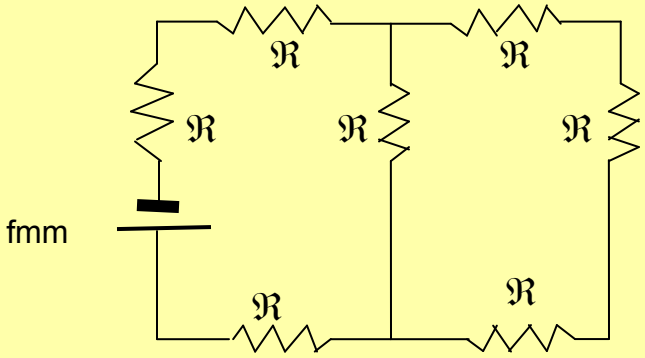
$$H_{fierro} \approx 66\,\mathrm{A/m} \qquad H_{aire} \approx 1,99\times 10^5\ A/m$$

Ejemplo 11. Un circuito magnético que tiene la forma que se muestra en la figura tiene un enrrollamiento con 100 vueltas de alambre con corriente I = 1 A. El devanado se localiza en el extremo izquierdo del circuito. La altura del circuito es de 10 cm, su longitud es de 20 cm, la sección transversal es 6 cm^2 y la permeabilidad de las barras, que se considera constante, es de 5000 μ_0. Despreciando la fuga, calcule el campo inducción magnética en el interior de cada una de las barras verticales del circuito.



El número de líneas de inducción que salen del circuito (la fuga) es despreciable porque la reluctancia de las barras de fierro es mucho menor que la del aire

Solución:



El circuito puede ser descompuesto en barras de 10 cm de longitud y 6 cm^2 de área. Cada una con reluctancia $\Re$.

$$\Re = \frac{\ell}{\mu A} = \frac{0{,}1\,\mathrm{m}}{5000\,\mu_0 \times 6\times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}$$

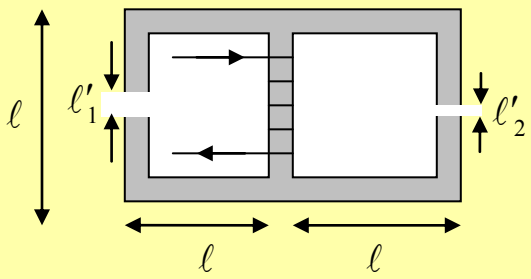
La reluctancia equivalente (serie-paralelo) es:

$$\Re_{equi} = \frac{15}{4}\Re$$

$$fmm = NI = 100 = \frac{15}{4}\Re\, B_{izquierda}\,(6\times 10^{-4})\,\mathrm{m}^2$$

$$B_{izquierda} \approx 1{,}68\,T \qquad B_{centro} \approx 1{,}26\,T \qquad B_{derecha} \approx 0{,}42\,T.$$

Ejemplo 12. Considere el circuito magnético de la figura. Halle el campo inducción magnética en cada una de las dos aberturas.



200 vueltas, 5 A

$\mu = 5000\,\mu_0$

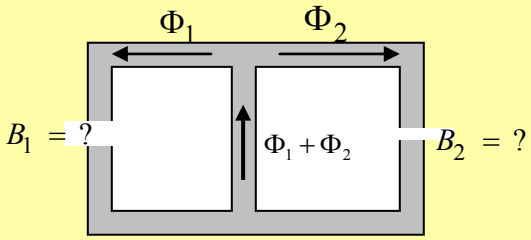
$\ell = 100\ \text{mm}$

$\ell'_1 = 10\,\text{mm}$

$\ell'_2 = 1{,}0\ \text{mm}$

sección transversal = A = 4 mm^2

Solución:



$$N\,I = \Re\,(\Phi_1 + \Phi_2) + \Re_1\,\Phi_1 \qquad \text{(i)}$$

$$N\,I = \Re\,(\Phi_1 + \Phi_2) + \Re_2\,\Phi_2 \qquad \text{(ii)}$$

$$\Re_1\,\Phi_1 = \Re_2\,\Phi_2 \qquad \text{(iii)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (i), (ii) y (iii) tenemos:

$$\Phi_1 = B_1 A = \frac{N\,I\,\Re_2}{\Re\Re_1 + \Re\Re_2 + \Re_1\Re_2} \qquad \Phi_2 = B_2 A = \frac{N\,I\,\Re_1}{\Re\Re_1 + \Re\Re_2 + \Re_1\Re_2}$$

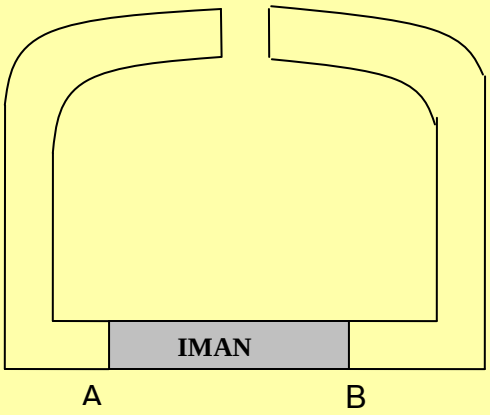
Y considerando los siguientes valores de las reluctancias involucradas,

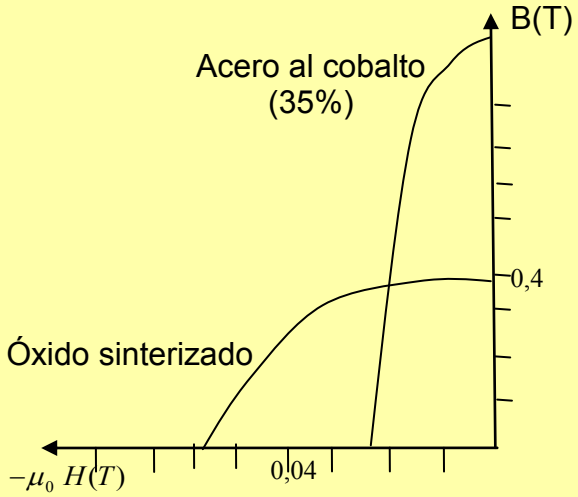
$$\Re = \frac{\ell}{5000\,\mu_0\,A} \qquad \Re_1 = \frac{3\ell - \ell'_1}{5000\,\mu_0\,A} + \frac{\ell'_1}{\mu_0\,A} \qquad \Re_2 = \frac{3\ell - \ell'_2}{5000\,\mu_0\,A} + \frac{\ell'_2}{\mu_0\,A}$$

tendremos:

$$B_1 = 122\ mT \qquad B_2 = 1{,}16\ T$$

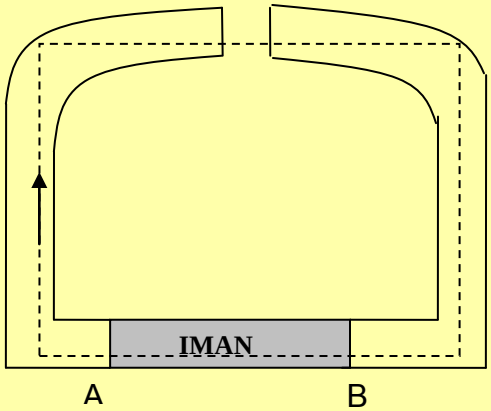
Ejemplo 13. (Circuitos con imanes permanentes) Un circuito magnético de la forma que se muestra en la figura tiene un imán permanente de 8 cm de longitud, una longitud de trayectoria en hierro dulce de 16 cm y un entrehierro de 0,8 cm. La sección transversal del hierro y el imán es de 4 cm^2 en promedio, mientras que el área efectiva de la sección transversal del entrehierro es de 3 cm^2. La permeabilidad relativa del hierro es 5000. Calcule el campo B en el entrehierro, considerando que el material del imán es: (a) óxido sinterizado y (b) acero al cobalto (35%). Desprecie la fuga. Las curvas de la derecha son curvas de histéresis de los dos imanes permanentes mencionados.





Solución:

Aplicando la ley de Ampere a la trayectoria mostrada en la figura se tiene:



$$\oint \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_{A}^{B}{}_{\text{hierro}} H\, d\ell = -\int_{B}^{A}{}_{\text{iman}} H\, d\ell$$

$$\int_{A}^{B}{}_{\text{hierro}} H\, d\ell = -H_{iman}\, \ell_{iman}$$

$$\Phi \int_A^B \frac{d\ell}{\mu A} = -H_{imán}\ell_{imán}$$

$$\Phi\, \Re_{eq} = -H_{imán}\, \ell_{imán} \qquad \text{(i)}$$

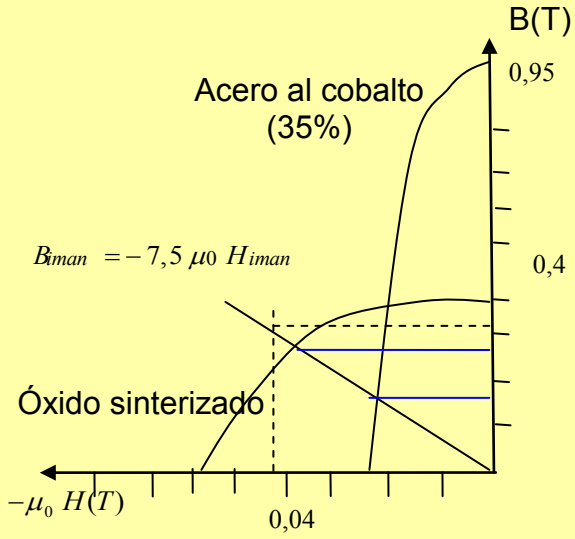
$$\Re_{eq} = \frac{\ell_{fierro}}{5000\,\mu_0\, A_{fierro}} + \frac{\ell_{aire}}{\mu_0\, A_{aire}} \approx \frac{\ell_{aire}}{\mu_0\, A_{aire}} \qquad \text{(ii)}$$

Reemplazando (ii) en (i)

$$B_{imán}\, A_{imán}\, \frac{\ell_{aire}}{\mu_0\, A_{aire}} = -H_{imán}\, \ell_{imán}$$

$$B_{iman} = -\mu_0\, H_{iman}\, \frac{\ell_{iman}}{\ell_{aire}}\, \frac{A_{aire}}{A_{iman}} \quad \Rightarrow \quad B_{iman} = -7{,}5\,\mu_0\, H_{iman} \qquad (*)$$

Esta es una relación entre B y H dentro del imán. Otra relación entre ambas cantidades es la fracción de la curva de histéresis para cada material dada como dato del problema. Para satisfacer la condición de frontera $B_{1n} = B_{2n}$ se debe tener: $B_{imán} = B_{gap} = B$. El valor de B se obtiene gráficamente como la intersección de la recta (*) con la curva de histéresis de cada material.



Para óxido sinterizado

$$B_{imán} = B_{gap} = 0{,}26\,\text{T}$$

Para acero al cobalto (35%)

$$B_{imán} = B_{gap} = 0{,}16\ \text{T}$$

PROBLEMAS

1. Calcular **B** y **H**, en puntos interiores y exteriores, debido a un cilindro de longitud infinita y radio R uniformemente magnetizada con $\vec{M} = M_0 \, \hat{e}_x$, perpendicular al eje del cilindro.

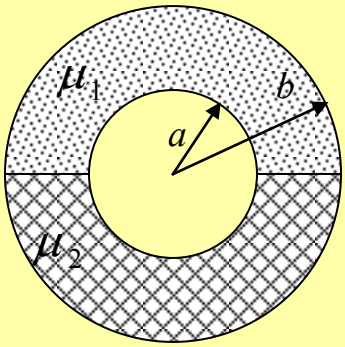
2. Calcular **B** y **H**, en puntos interiores y exteriores, debido a un cilindro de longitud infinita y radio R, magnetizado con $\vec{M} = M_0 \frac{\rho}{R} \hat{e}_\phi$.

3. Calcular **B** y **H**, en puntos interiores y exteriores, debido a una esfera de radio R magnetizada con ($\vec{M} = M_0 \frac{r}{R} \hat{e}_r$).

4. Dado un medio (2) de permeabilidad μ que tiene una superficie plana en contacto con el aire (medio 1), si no existen corrientes de transporte superficiales y el campo $\mathbf{H}_2$ hace un ángulo de 45^0 con la normal a la interfase, a) ¿Cuál debe ser el valor de μ para que el ángulo entre $\mathbf{H}_1$ y la normal sea: a) 30^0, 1^0, $0{,}01^0$?

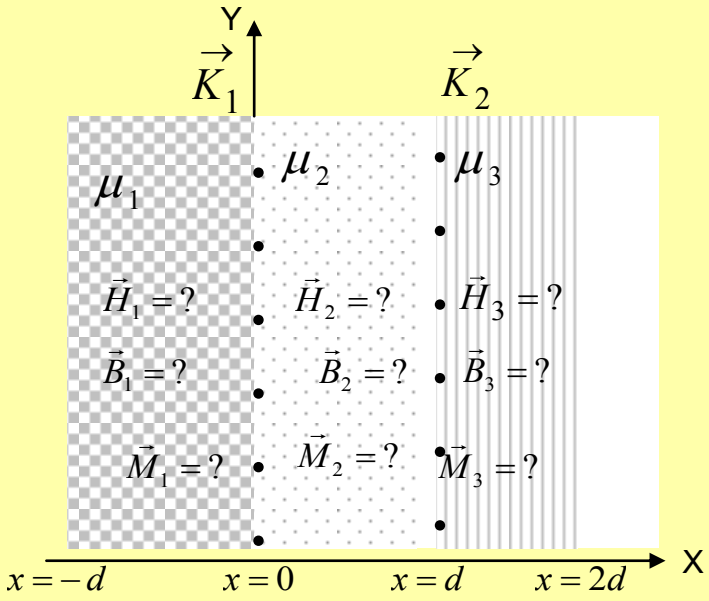
5. Considere un cable coaxial muy largo (para fines prácticos de longitud infinita) constituido por cáscaras cilíndricas conductoras de radios a y b y de espesor despreciable. Por las láminas circulan corrientes I y -I respectivamente en la dirección longitudinal. El espacio entre las láminas conductoras se ha llenado con dos medios eléctricamente aislantes con permitividades magnéticas μ_1 y μ_2, respectivamente, como se muestra en la figura. Halle:

- **a)** El campo **B** en cada medio
- **b)** El campo **H** en cada medio
- **c)** Verifique que **B** y **H** satisfacen las condiciones de frontera entre los dos medios magnéticos.
- **d)** Las corrientes superficiales de magnetización en la superficie $r = a$.
- **e)** La corriente de transporte en cada semicilindro de radio a.
- **f)** La corriente neta ($I + I_M$) en el cilindro de radio a.



6. Por dos planos infinitos paralelos circulan corrientes superficiales K_1 y K_2 (K_1 > K_2) respectivamente. Rodeando a los planos hay tres medios de permeabilidades magnéticas μ_1, μ_2, μ_3 como se muestra en la figura. Halle

a) Los campos **B**, **M** y **H** en cada medio
b) Las corrientes de magnetización.
c) Volver a calcular el campo inducción magnética en el medio μ_3 por superposición de las contribuciones de las corrientes de transporte y todas las corrientes de magnetización.



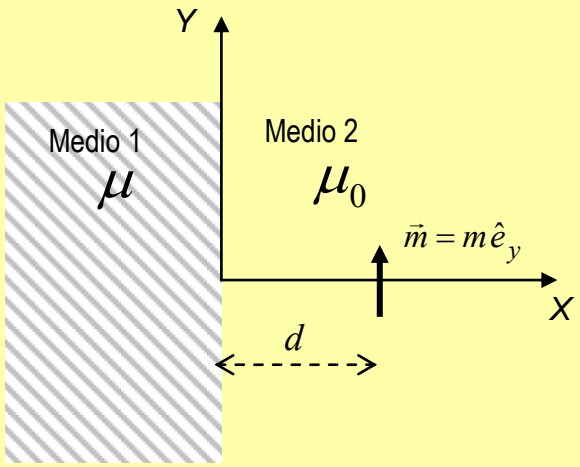
7. Considere un dipolo magnético con momento dipolar $\vec{m} = m\hat{e}_y$ en el vacío a una distancia d de la interface plana con un medio semi infinito paramagnético

lineal, isotrópico, homogéneo de permeabilidad μ (medio 1). Considere que los campos **B** y **H** en el vacío (medio 2) pueden obtenerse como la superposición de los campos creados por $\vec{m}$ y un dipolo imagen $\vec{m}'$ ubicado en el medio 1 a una distancia d de la interface y que los campos en el medio 1 están dados por un dipolo equivalente $\vec{m}''$ ubicado en la misma posición del dipolo $\vec{m}$.

a) Halle los valores de $\vec{m}'$ y $\vec{m}''$ que satisfacen las condiciones de frontera $B_{1n}= B_{2n}$ y $H_{1t} = H_{2t}$ en la interface.

b) Escriba en forma vectorial el campo **B** en ambos medios.

c) Vea los casos especiales de superconductor y ferromagnético perfecto.



8. Repita el problema anterior pero considere ahora el dipolo $\vec{m} = m\hat{e}_x$

9. Un cilindro muy largo (de longitud infinita) tiene su eje paralelo al eje *Z* y tiene magnetización permanente uniforme $\vec{M} = M\hat{\imath}$. Partiendo de que en ambos medios los campos **B** y **H** pueden obtenerse respectivamente a partir del potencial escalar magnético:

$$U_1(r,\theta) = A_1\, r\, \mathrm{Cos}\theta + \frac{C_1}{r}\mathrm{Cos}\theta \qquad \text{si } r < a$$

$$U_2(r,\theta) = A_2\, r\, \mathrm{Cos}\theta + \frac{C_2}{r}\mathrm{Cos}\theta \qquad \text{si } r > a$$

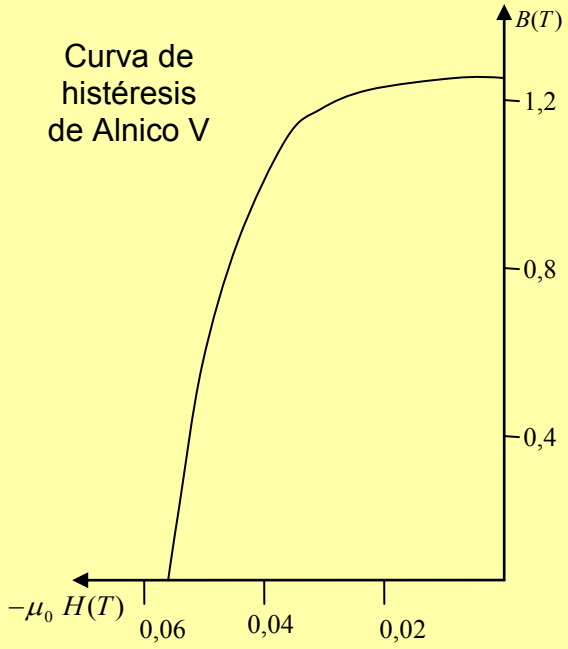
i) Halle una relación entre los campos **B** y **H** en el medio magnético.

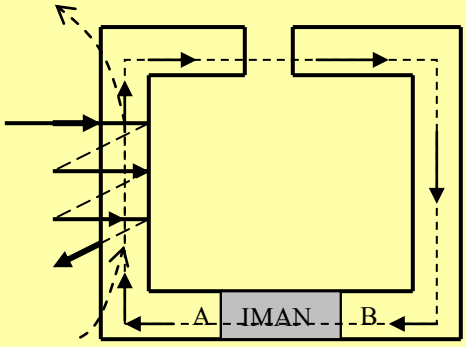
ii) Si el cilindro está hecho de un material ferromagnético cuya curva de histéresis en el segundo cuadrante puede aproximase por la ecuación:

$$B^2 + \left(\frac{\mu H}{4}\right)^2 = 1$$

10. Blindaje magnético: Un cascarón cilíndrico de material magnético con permeabilidad μ, radio interno a y radio externo b , es colocado en un campo $\mathbf{B_0}$ inicialmente uniforme perpendicular al eje del cilindro. Hallar **B** en el interior.

11. Considere el circuito magnético que se muestra en la figura. Consta de un imán de Alnico V de 8,0 cm de longitud, una longitud de hierro dulce de 16,0 cm y un entrehierro de 8 mm. También tiene un devanado de 800 ampere-vuelta de alambre (en un sentido tal que favorece el flujo producido por el imán). Encuentre **B** en el entrehierro. Desprecie las fugas, considere permeabilidad relativa del hierro dulce igual a 5000 y que todas las secciones transversales son iguales.





El número de líneas de inducción que salen del circuito (las fugas) es despreciable porque la reluctancia de las barras de hierro dulce es mucho menor que la del aire

12. Un electroimán está constituido por una varilla de material ferromagnético de 160 mm (doblada como se muestra en la figura al final de la página), un entrehierro y 800 vueltas de alambre de cobre por el cual puede circular corriente de hasta 2 A. La curva de magnetización del material ferromagnético se puede expresar aproximadamente por la relación:

$$B = \frac{1,5H}{H+100}$$

Si inicialmente el material magnético está desmagnetizado y se aplica una corriente de 2 A. Determine el valor del campo inducción magnética en el entrehierro cuando su longitud es: a) 4 mm b) 3mm.

13. Considere que se ha establecido una corriente superficial

$$K = K_0 \ \text{Sen}\theta \ \hat{e}_\phi$$

en la superficie de una esfera de radio R. El interior de la esfera está lleno de un material magnético de permeabilidad μ y en la región externa sólo hay aire (o vacío). El campo magnético en infinito es cero.

a) ¿Cuáles son las condiciones de frontera para el campo magnético en $r = 0$ y $r = R$?

b) Escriba una solución general para el potencial escalar magnético dentro y fuera de la esfera.

c) Resuelva para hallar B y H en cada medio

d) ¿Cuál es el momento dipolar magnético efectivo del material magnetizado y de la corriente superficial?

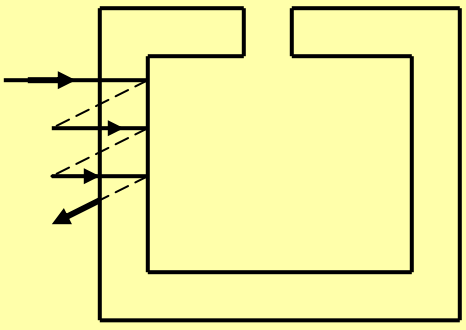


Figura prob 12

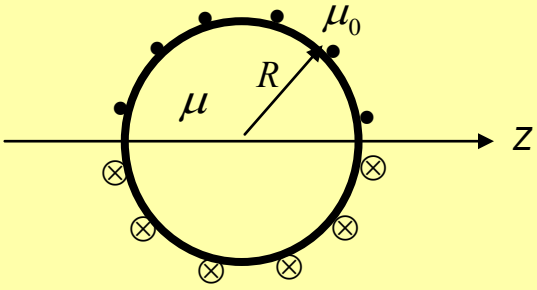
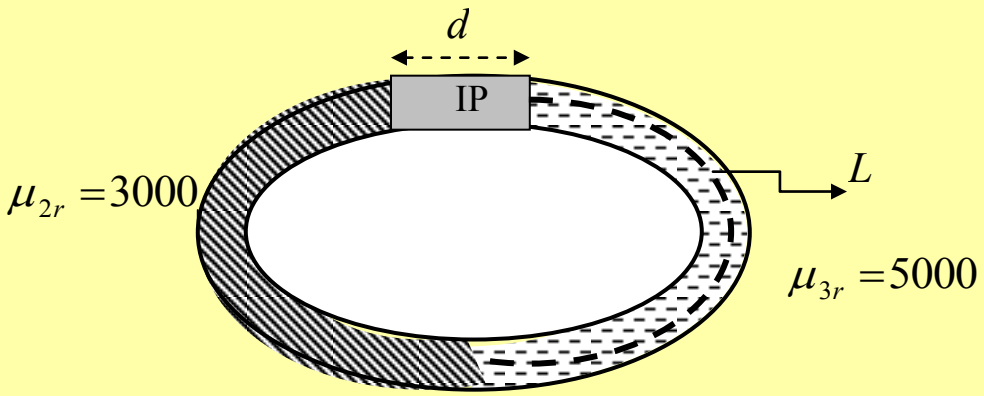


Figura prob 13

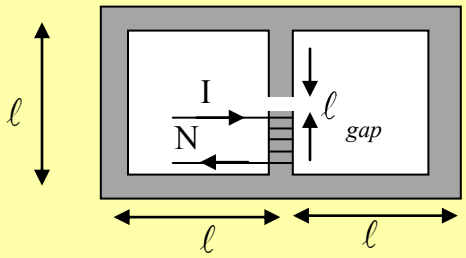
14. Un circuito magnético está constituido por un imán permanente (IP) de forma cilíndrica, de sección transversal A y longitud d, magnetizado a lo largo de su eje; y dos segmentos toroidales de materiales magnéticos lineales de sección transversal A y cada una de longitud L. La relación H vs B para la curva de histéresis en el segundo cuadrante puede aproximarse por:

$$B_1 = \left(1 - 16875\ \mu_0^2 H_1^{\,2}\right) \text{Tesla}$$

y las permeabilidades relativas son las que se muestran en la figura. Hallar el campo **B** dentro del imán para d = 8 cm y L = 100 cm.



15. Considere el circuito magnético simétrico de la figura. Halle el valor de la corriente I para que el campo inducción magnética en el gap de aire sea 0,6 T, cuando el material magnético del circuito es. a) fierro fundido, b) acero fundido



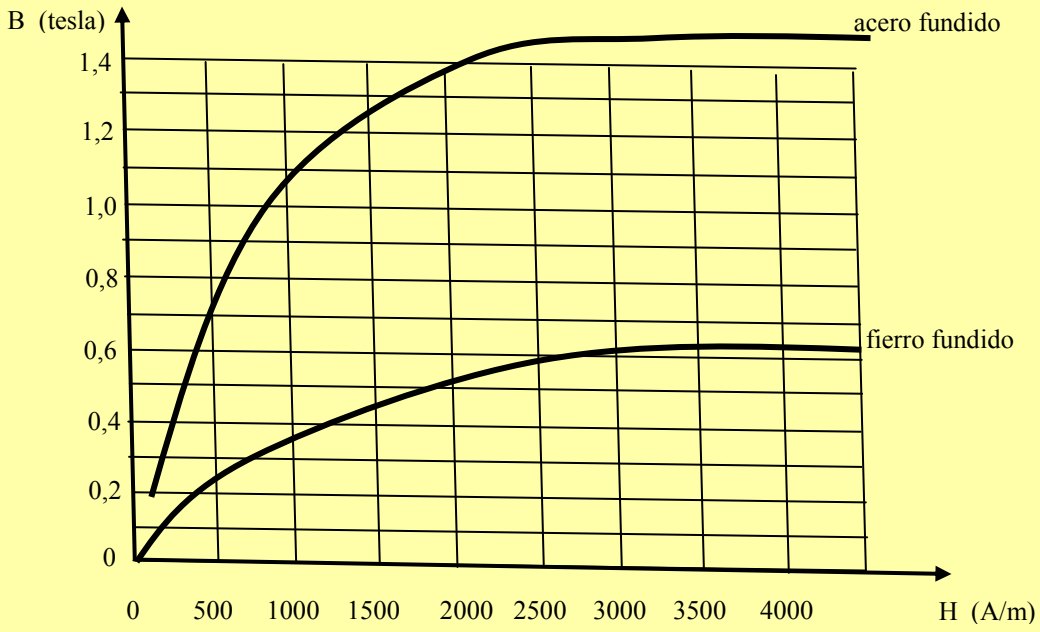
N = 400 vueltas

$\ell = 4$ cm

$\ell_{gap} = 0{,}5\ c\text{m}$

sección transversal = A = 1 cm^2

NOTA: Las curvas de magnetización de los materiales se muestran en la figura a continuación.



16. Aplicando la ley circuital de Ampere a la trayectoria ABCD de la figura 7 (página 351), deducir la condición de frontera para la componente tangencial del campo intensidad magnética:

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{K} \times \hat{n}$$

CAPITULO 10

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

10.1 INTRODUCCIÓN

Lo estudiado hasta ahora de la teoría electromagnética es la electrostática y la magnetostática. Las fuerzas que actúan sobre una carga puntual pueden ser atribuidas a un campo eléctrico conservativo $\vec{E}_c$ y/o a un campo inducción magnética $\vec{B}$. Las fuentes de $\vec{E}_c$ son cargas en reposo

$$\vec{E}_c(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$$

y tiene las siguientes propiedades:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_c = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Las fuentes del campo $\vec{B}$ son corrientes estacionarias

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Volumen}} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$$

y tiene las siguientes propiedades.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

El campo $\vec{B}$ actúa sólo sobre cargas en movimiento, mientras que $\vec{E}_c$ puede también actuar sobre cargas en reposo.

Este capítulo trata sobre una nueva fuerza electromagnética que puede ser atribuida a un nuevo campo cuyo origen está en la variación temporal de $\vec{B}$, que como $\vec{E}_c$ puede actuar sobre cargas en reposo, pero es no conservativo. Lo llamamos campo eléctrico no conservativo $\vec{E}_{nc}$. Diremos entonces que la fuerza electromagnética sobre una carga puntual se expresará en general así:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}} \qquad (1)$$

donde: $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_{nc}$

10.2 LEY DE FARADAY

Una serie de experimentos descritos en cursos de Física General permiten establecer que la variación respecto al tiempo del flujo magnético a través de una superficie S limitada por una trayectoria cerrada C produce (genera o induce) una fuerza electromotriz a lo largo de C.

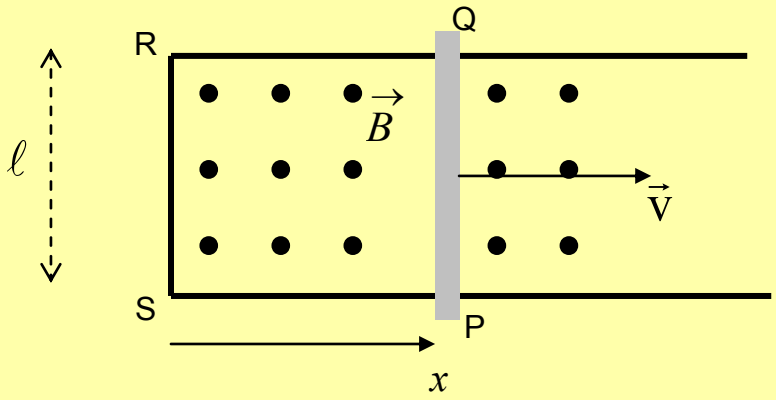
$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2}$$

La inducción de una fuerza electromotriz a lo largo de la trayectoria significa la existencia de un campo eléctrico no conservativo por lo menos en parte de la trayectoria cerrada.

$$\oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \tag{3}$$

LEY DE LENZ. El signo menos en las dos ecuaciones anteriores nos recuerda que el sentido de la corriente eléctrica que aparecería en la trayectoria cerrada C, si hubiera cargas libres, sería tal que se opondría al cambio que la produce.

Ejemplo 1. En un campo inducción magnética uniforme $\vec{B}$ saliendo del plano de la figura se ha colocado un circuito, formado por dos rieles largos paralelos, una varilla fija RS y una varilla móvil PQ que se desplaza con velocidad $\vec{\mathrm{v}}$ constante. Determinar la fem inducida en el circuito. ¿Cual sería el sentido de la corriente inducida?



Solución: $\Phi = B\ell x \implies \xi = B\ell \mathrm{v}$. Por ley de Lenz: la corriente inducida circulará en sentido horario, es decir, en trayectoria QPSRQ.

10.3 CAMPO ELECTRICO NO CONSERVATIVO EN MEDIOS FIJOS

Para una superficie S limitada por C en un medio fijo con respecto a un observador inercial, la ecuación (3) puede escribirse también como:

$$\oint_C \vec{E}_{nc} \bullet d\vec{\ell} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{a} \tag{4}$$

Por teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E}_{nc} \bullet d\vec{\ell} = \iint_S (\text{rot}\, \vec{E}_{nc}) \bullet d\vec{a}$$

De lo cual se obtiene:

$$\boxed{\text{rot}\, \vec{E}_{nc} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \tag{5}$$

Comparando las ecuaciones (4) y (5) con la la ley de Ampere (ecuaciones (19) y (23) del capítulo (8)) podemos decir que las fuentes del campo eléctrico no conservativo $\vec{E}_{nc}$ están en cada punto del espacio donde existe un campo $\vec{B}$ variando con el tiempo. Por analogía con magnetostática podemos escribir la expresión general para el campo eléctrico no conservativo:

$$\vec{E}_{nc}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\text{Volumen}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}\,') \right) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|^3} dV' \tag{6}$$

y puede mostrarse que:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E}_{nc} = 0 .$$

Aunque la ec (6) es de validez general, es poco práctica para hacer cálculos del campo $\vec{E}_{nc}$. En este capítulo sólo consideramos problemas con la simetría suficiente para poder evaluar $\vec{E}_{nc}$ usando la ec. (4).

La ec (5) es la forma diferencial de la ley de Faraday y es una de las ecuaciones de Maxwell que resumen la teoría electromagnética. También puede escribirse en función del potencial vectorial magnético

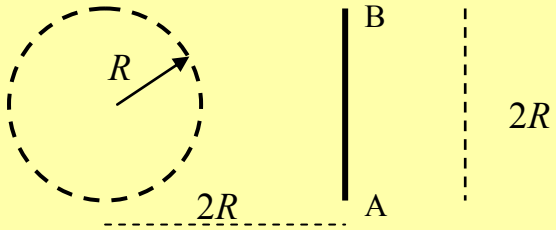
$$\vec{E}_{nc} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{7}$$

Ejemplo 2. En la región cilíndrica de longitud infinita $r < R$ (interior de un solenoide) existe un campo magnético variable con el tiempo descrito por:

$$\vec{B} = \begin{cases} \hat{e}_z B_0 \operatorname{Cos}\omega t \ , & \text{si} \quad r < R \\ 0 \qquad\qquad\quad , & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

a) Obtener el campo eléctrico en cualquier punto del espacio

b) Encontrar la diferencia de potencial inducido en la varilla estática AB



Solución: Este ejemplo es análogo al ejemplo 8 del capítulo 8. El análogo de $\vec{J}$ es la variación temporal del campo inducción magnética:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{cases} \hat{e}_z \, \omega B_0 \operatorname{Sen}\omega t \ , & \text{si} \quad r < R \\ 0 \qquad\qquad\quad , & \text{si} \quad r > R \end{cases}$$

Para puntos $r < R$:

$$\oint_C \vec{E}_{nc} \bullet d\vec{\ell} = \omega B_0 \pi r^2 \operatorname{Sen}\omega t$$

$$2\pi r E_{nc} = \omega B_0 \pi r^2 \operatorname{Sen}\omega t$$

$$\vec{E}_{nc} = \frac{\omega B_0 r}{2} \operatorname{Sen}\omega t \, \hat{e}_\phi$$

Para puntos $r > R$:

$$2\pi r E_{nc} = \omega B_0 \pi R^2 \operatorname{Sen}\omega t$$

$$\vec{E}_{nc} = \frac{\omega B_0 R^2}{2r} \operatorname{Sen}\omega t \, \hat{e}_\phi$$

Fuerza electromotriz en varilla AB:

$$\xi(t) = \int_A^B \vec{E}_{nc} \bullet d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = \omega B_0 R^2 \operatorname{Sen}\omega t \int_0^R \frac{dy}{r} \operatorname{Cos}\phi \, ; \qquad \begin{cases} y = 2R \operatorname{Tg}\phi \\ r = 2R \operatorname{Sec}\phi \end{cases}$$

$$\boxed{\xi(t) = \omega B_0 R^2 \operatorname{Sen}\omega t \operatorname{Tg}^{-1}(1/2)}$$

10.4 CAMPO ELÉCTRICO INDUCIDO POR MOVIMIENTO

En medios móviles, por ejemplo en una superficie S limitada por un circuito C que se mueve con velocidad $\vec{v}$, para calcular la derivada total del flujo magnético tenemos que tener en cuenta que el flujo cambia porque B está cambiando y porque los puntos de la superficie en cada instante son diferentes. Puede demostrarse que:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} + \oint_C \left(\vec{B} \times \vec{v}\right) \cdot d\vec{\ell} \qquad (8)$$

Un observador O' que se mueve a la misma velocidad que el circuito C observará una fuerza electromotriz inducida:

$$\oint_C \vec{E}'_{nc} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

que también se puede escribir en la forma:

$$\oint_C \left[\vec{E}'_{nc} - (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{\ell} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Esta ecuación se interpreta diciendo que el integrando en el primer miembro es el campo eléctrico no conservativo observado por el observador O en el laboratorio y que obedece por tanto la ecuación (3).

Queda así establecida la relación entre los campos no conservativos observados por O y por O':

$$\vec{E}'_{nc} = \vec{E}_{nc} + (\vec{v} \times \vec{B})$$

Al término:

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}} \qquad (9)$$

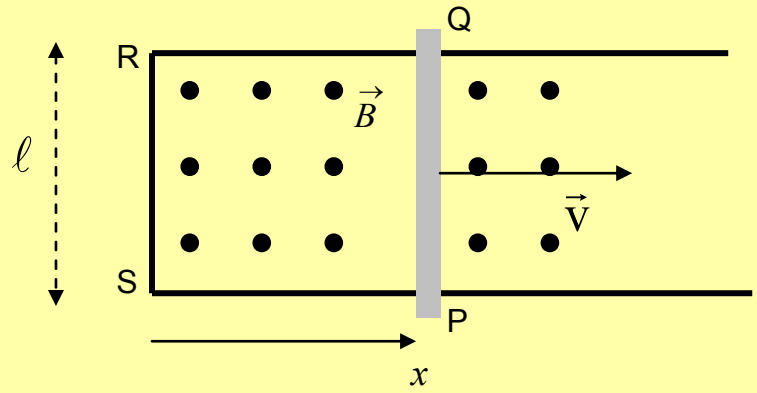
se le llama campo eléctrico inducido por movimiento.

Así, la fuerza electromotriz inducida en cualquier circuito móvil dentro de un campo **B** estático: según O' es debida al campo eléctrico por movimiento, pero el observador O puede decir que es debida a la fuerza magnética $q\,\vec{v} \times \vec{B}$.

Ejemplo 3. En el circuito formado por dos rieles largos paralelos, una varilla fija RS y una varilla móvil PQ que se desplaza con velocidad $\vec{\mathrm{v}}$ constante en un campo $\vec{B}$ uniforme, determinar la fem inducida en el circuito explicándola desde el punto de vista de un observador:

a) O fijo al laboratorio

b) O' que se mueve a la misma velocidad que la varilla PQ



Solución:

Ya hemos visto en el ejemplo 1 que habrá una corriente inducida en el sentido QPSRQ.

a) Desde el punto de vista de O fijo en el laboratorio, esta corriente se debe a que la fuerza magnética $q\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}$ bombea portadores positivos de Q a P.

b) Desde el punto de vista de O' los portadores de la varilla no experimentan fuerza magnética porque la velocidad de los portadores es nula. Pero O' está seguro que los portadores de la varilla se están moviendo en un campo eléctrico $\vec{E_m} = \vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}$

Ejercicio Demostrar que, en el ejemplo anterior, si el campo $\vec{B}$ no fuera estático sino:

$$\vec{B} = B_0 \,\mathrm{Sen}\,\omega t\,.$$

Entonces, la fuerza electromotriz sería:

$$\xi = \mathrm{v}B_0\,\ell\,\mathrm{Sen}\,\omega t \;+\; B_0\,\ell\,x\,\omega\mathrm{Cos}\omega t$$

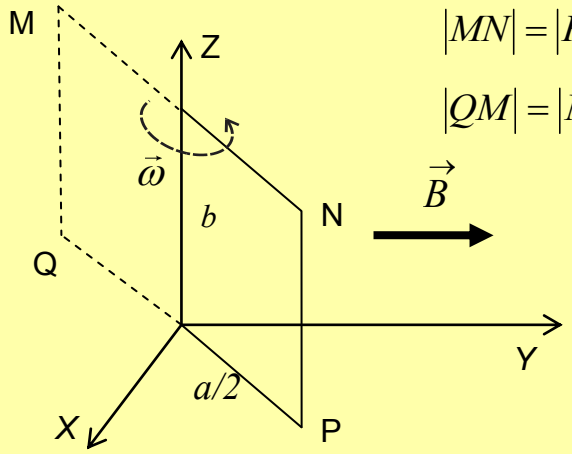
Preguntas importantes: ¿Cuál es la definición de fem?, ¿La fuerza magnética produce trabajo?, ¿Quién hace el trabajo necesario para mantener corriente inducida en el caso de ejemplos 1 y 3? (Ver problema propuesto 8).

Ejemplo 4. La espira rectangular MNPQM está rotando con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_z$ en un campo inducción magnética constante y uniforme $\vec{B} = B\,\hat{e}_y$.

Calcule la fuerza electromotriz inducida

a) utilizando el concepto de campo eléctrico inducido por movimiento $\vec{E}_m$.

b) utilizando sólo el concepto de flujo magnético

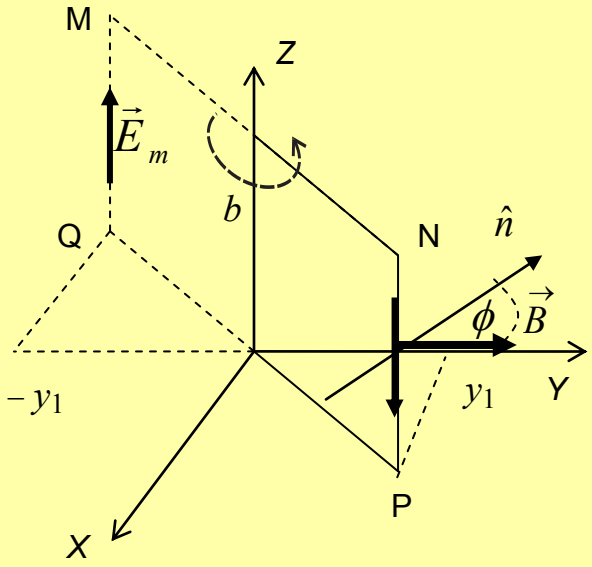


$$|MN| = |PQ| = a$$

$$|QM| = |NP| = b$$

Solución:

a) $\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_m = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_m = -\,B\,\omega\,y\,\hat{e}_z$



$$\oint_C \vec{E}_m \bullet d\vec{\ell} = \left[\int_Q^M (B\omega y_1)\,dz + \int_N^P (-B\omega y_1)\,dz \right]$$

$$\oint_C \vec{E}_m \bullet d\vec{\ell} = 2Bb\,\omega y_1$$

donde: $|QM| = |NP| = b$

y puesto que: $|MN| = |PQ| = a$

$$y_1 = \frac{a}{2}\,\mathrm{Sen}\phi$$

$$\xi = B\omega\,a\,b\,\mathrm{Sen}\left(\omega t + \phi_0\right)$$

b) También

$$\Phi = Bab\,\mathrm{Cos}\left(\omega t + \phi_0\right) \qquad \Rightarrow \qquad \xi = B\omega\,a\,b\,\mathrm{Sen}\left(\omega t + \phi_0\right)$$

Ejemplo 5. Repetir el problema anterior suponiendo que el campo magnético depende del tiempo según la ecuación:

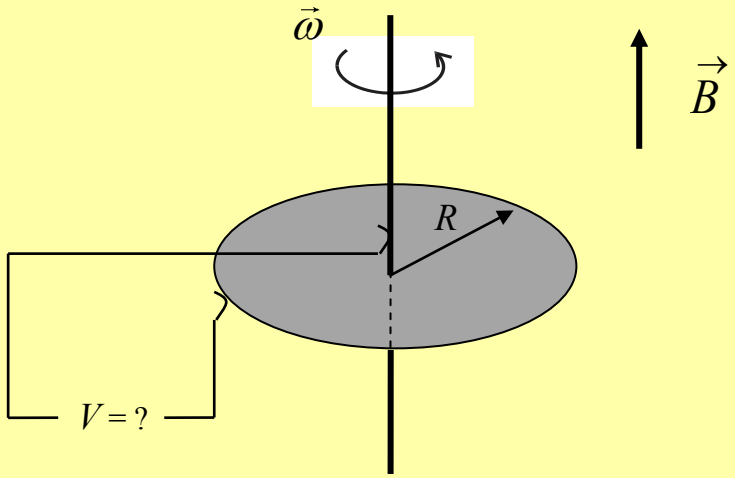
$$\vec{B} = B_0 \operatorname{Sen} \omega_1 t$$

Solución:

$$\Phi = B_0 \; a \, b \operatorname{Sen} \omega_1 t \; \operatorname{Cos}(\omega t + \phi_0)$$

$$\xi = B_0 \, ab \left\{ \omega \operatorname{Sen} \omega_1 t \operatorname{Sen}\left(\omega t + \phi_0\right) - \omega_1 \operatorname{Cos} \omega_1 t \; \operatorname{Cos}\left(\omega t + \phi_0\right) \right\}$$

Ejemplo 6. El generador homopolar de Faraday consiste de un disco circular de metal de radio R que gira con velocidad angular constante ω en un campo magnético constante y uniforme $\mathbf{B} = \hat{e}_z B_0$ paralelo al eje de rotación. Una escobilla de contacto se coloca sobre el eje mismo y otra escobilla en el borde del disco. Determine el voltaje en circuito abierto



$$\vec{E}_m = \vec{\mathrm{v}} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_m = (\vec{\omega} \times \vec{r}\,) \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_m = B \, \omega \, \rho \, \hat{e}_\rho$$

$$\xi = \int_0^R \vec{E}_m \bullet d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = B \omega \frac{R^2}{2}}$$

Ejemplo 7: Un cilindro dieléctrico l.i.h. muy largo, de radio R, con susceptibilidad eléctrica χ rota con velocidad angular constante ω respecto a su eje en un campo inducción magnética **B** paralelo al eje del cilindro, que a su vez coincide con el eje *Z* de coordenadas. Hallar:

a) El campo eléctrico de movimiento
b) La polarización eléctrica
c) La densidad volumétrica de carga de polarización
d) La densidad superficial de carga de polarización

Solución:

$$\vec{E}_m = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}_m = B\omega\rho\,\hat{e}_\rho}$$

La polarización tendrá la forma:

$$\vec{P} = C\,\rho\,\hat{e}_\rho \qquad \text{(i)}$$

donde C es una constante a determinar**.** La densidad volumétrica de carga de polarización será:

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\bullet\vec{P} = -2C$$

Esta carga de polarización produce un campo eléctrico conservativo que se superpone al campo eléctrico de movimiento. Se calcula usando ley de Gauss:

$$\vec{E}_c = -\frac{C}{\varepsilon_0}\rho\,\hat{e}_\rho$$

La relación de coexistencia entre el campo eléctrico neto y la polarización nos permitirá obtener el valor de la constante C.

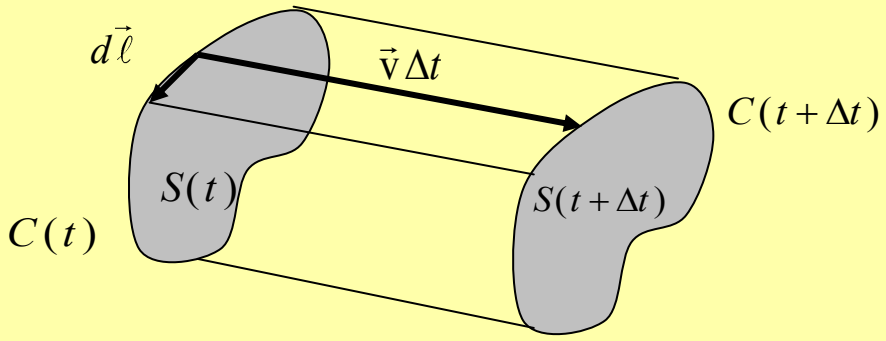
$$\varepsilon_0\chi\,(\vec{E}_m + \vec{E}_c) = \vec{P}$$

$$\varepsilon_0\,\chi\left(\omega B - \frac{C}{\varepsilon_0}\right)\rho\,\hat{e}_\rho = C\rho\hat{e}_\rho \qquad C = \frac{\varepsilon_0\,\chi\,\omega B}{1+\chi} \qquad \text{(ii)}$$

Reemplazando (ii) en (i) se tiene: $\boxed{\vec{P} = \dfrac{\varepsilon_0\chi\,\omega B}{1+\chi}\,\rho\,\hat{e}_\rho}$

Luego: $$\rho_P = -\frac{2\,\varepsilon_0\,\chi\,\omega B}{1+\chi} \qquad \sigma_P = \frac{\varepsilon_0\,\chi\,\omega BR}{1+\chi}$$

Ejemplo 8: Obtener la ec (8) para la derivada total del flujo magnético con respecto al tiempo a través de una superficie que se desplaza con velocidad $\vec{\mathrm{v}}$.



$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{\Delta t}\left\{\iint_{S(t+\Delta t)}\vec{B}\,(t+\Delta t)\bullet d\vec{a}-\iint_{S(t)}\vec{B}\,(t)\bullet d\vec{a}\;\right\}$$

Para hacer este cálculo consideremos el flujo a través de toda la superficie cerrada de la figura.

$$\oiint_{S_{total}}\vec{B}\,(t+\Delta t)\bullet d\vec{a}=0$$

$$\iint_{S(t+\Delta t)}\vec{B}(t+\Delta t)\bullet d\vec{a}-\iint_{S(t)}\vec{B}(t+\Delta t)\bullet d\vec{a}+\oint_{C}\vec{B}(t+\Delta t)\bullet\left(d\vec{\ell}\times\vec{\mathrm{v}}\right)\Delta t=0$$

en el segundo término usamos la aproximación: $B(t+\Delta t)=B(t)+\dfrac{\partial B}{\partial t}\Delta t$

en el tercer término hacemos la aproximación: $B(t+\Delta t)=B(t)$

Tenemos entonces:

$$\iint_{S(t+\Delta t)}\vec{B}(t+\Delta t)\bullet d\vec{a}-\iint_{S(t)}\vec{B}(t)\bullet d\vec{a}\;=\left\{\iint_{S(t)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{a}\;+\oint_{C}\left(\vec{B}(t)\times\vec{\mathrm{v}}\right)\bullet d\vec{\ell}\right\}\Delta t$$

$$\frac{d\Phi}{dt}\;=\;\iint_{S}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{a}\;+\oint_{C}\left(\vec{B}\times\vec{\mathrm{v}}\right)\bullet d\vec{\ell}\quad\text{L.q.q.d.}$$

10.5 AUTOINDUCTANCIA

Si tenemos un circuito aislado, rígido y fijo, con corriente I, éste producirá un campo **B** en cualquier punto del espacio. En esta sección Llamamos Φ al flujo magnético de este campo a través de cualquier superficie S limitada por el mismo circuito C. Si el circuito está conectado a una fuente externa variable, la corriente I podrá variar con el tiempo. La variación del flujo magnético con respecto al tiempo siempre podrá escribirse en la forma:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}\,\frac{dI}{dt}$$

Definición: La autoinductancia de un circuito queda definida como:

$$\boxed{L = \frac{d\Phi}{dI}} \qquad (10)$$

La fuerza electromotriz inducida por ley de Faraday quedará expresada entonces como:

$$\xi = -\,L\,\frac{dI}{dt}$$

Si el circuito está inmerso en el aire, vacío o medios lineales.

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\Phi}{I}$$

Ejemplo: Autoinductancia de una bobina o solenoide

Si no hay medios materiales en el interior, el flujo del campo de un solenoide a través de una de sus espiras es:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 NI}{\ell} A$$

El flujo a través de todas las espiras del solenoide es:

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I}{\ell} A$$

La autoinductancia de la bobina es entonces:

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2}{\ell} A}$$

10.6 INDUCTANCIA MUTUA

Si en una región del espacio hay *n* circuitos con corrientes I_1, I_2, … I_n, entonces el flujo a través de una superficie S_j limitada por el circuito C_j es la superposición de los flujos de los campos creados por todos los circuitos:

$$\Phi_j = \Phi_{j1} + \Phi_{j2} + \ldots \Phi_{jk} + \ldots \Phi_{jn}$$

Si la corriente en uno, en varios, o en todos los circuitos varía con el tiempo, la ley de Faraday nos dice que en cualquiera de los n circuitos se inducirá una fuerza electromotriz dada por:

$$\xi_j = -\left\{ \frac{d\Phi_{j1}}{dt} + \frac{d\Phi_{j2}}{dt} + \ldots \frac{d\Phi_{jj}}{dt} + \ldots \frac{d\Phi_{jk}}{dt} + \ldots + \ldots \frac{d\Phi_{jn}}{dt} \right\}$$

ó

$$\xi_j = -\left\{ \frac{d\Phi_{j1}}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi_{j2}}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} + \ldots \frac{d\Phi_{jj}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt} + \ldots \frac{d\Phi_{jk}}{dI_k}\frac{dI_k}{dt} + \ldots \right\}$$

Definición: La inductancia mutua entre dos circuitos j y k se define así:

$$\boxed{M_{jk} = \frac{d\Phi_{jk}}{dI_k}} \qquad (11)$$

En la próxima sección será evidente que $M_{jk} = M_{kj}$ por lo que no habrá ambigüedad en el orden de los subíndices.

La ley de Faraday para la fem inducida en el circuito j se podrá escribir entonces en la forma:

$$\xi_j = -\sum_{k=1}^{n} M_{jk} \frac{dI_k}{dt}$$

En medios lineales, isotrópicos y homogéneos, simplemente:

$$M_{jk} = \frac{\Phi_{jk}}{I_k}$$

10.7 FÓRMULA DE NEUMANN

Supongamos que tenemos dos circuitos C_1 con corriente I_1 y C_2 con corriente I_2. Llamemos $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ al campo creado por la corriente I_1 en cualquier punto del espacio.

El flujo del campo $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ a través de cualquier superficie S_2 limitada por el circuito C_2 es:

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 \, d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \right\} \cdot d\vec{a}_2$$

Considerando que el campo $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ se puede expresar en función del potencial vectorial magnético, se obtendrá:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 \, I_1}{4\pi} \iint_{S_2} \left\{ \vec{\nabla}_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} \right\} \cdot d\vec{a}_2$$

Por teorema de Stokes:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} d\vec{\ell}_2 \cdot \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

Si los circuitos están inmersos en medios lineales isotrópicos y homogéneos:

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} \qquad (12)$$

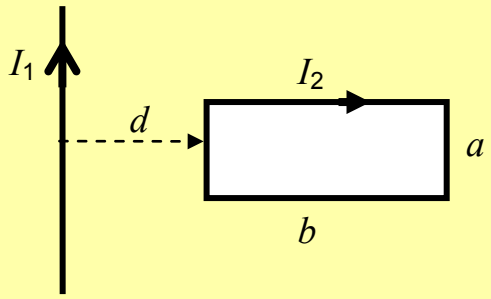
Esta es la fórmula de Neumann para la inductancia mutua.

Observando la simetría de esta ecuación respecto a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es evidente que.

$$M_{21} = M_{12}$$

La fórmula de Neumann nos ha conducido a este resultado que es muy importante; pero la ec. (12) no es muy práctica si se quiere usar para hacer cálculos de inductancias. Mostramos a continuación algunos ejemplos de cómo calcular inductancias mutuas y autoinductancias.

Ejemplo 9. Hallar la inductancia mutua entre un alambre infinito con corriente I_1 y una espira rectangular de dimensiones a por b en un plano que contiene al alambre por la que circula corriente I_2.

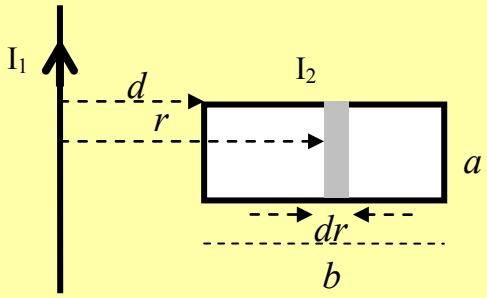


Solución:

El campo **B** debido al alambre en cualquier punto del área limitada por el circuito rectangular es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{e}_\phi$$

El flujo magnético a través de un rectángulo diferencial de área (adr)

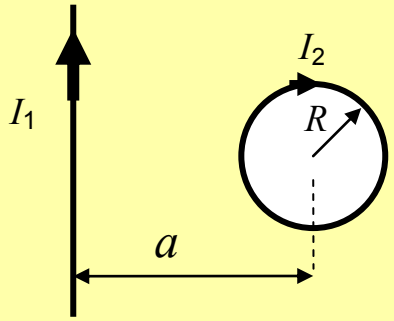


$$d\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ \frac{a\,dr}{r}$$

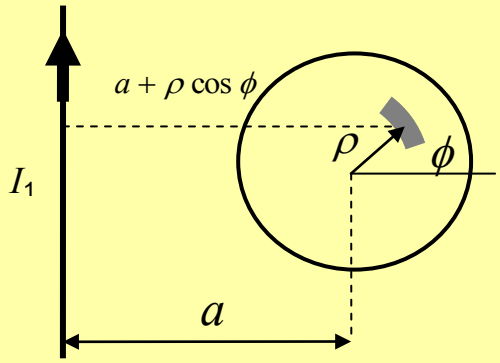
$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{a\,dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0\, I_1 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)$$

$$M_{21} = M_{12} = M = \frac{\mu_0\, a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)$$

Ejemplo 10. Hallar la inductancia mutua entre un alambre infinito con corriente I_1 y una espira circular de radio R en un plano que contiene al alambre por la que circula corriente I_2.



Solución



El flujo a través del elemento diferencial de área $\rho\, d\rho\, d\phi$ es:

$$d\Phi_{21} = \frac{\mu_0\, I_1\, \rho\, d\rho\, d\phi}{2\pi\left(a\ +\ \rho \mathrm{Cos}\phi\right)}$$

El flujo a través de toda el área limitada por la espira circular es:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\ \pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\phi}{\left(a\ +\ \rho \mathrm{Cos}\phi\right)}$$

Por teorema del residuo podemos evaluar la integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left(a + \rho\, \mathrm{Cos}\phi\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

$$\Phi_{21} = \mu_0 I_1 \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \mu_0 I_1 \left\{a\ -\ \sqrt{a^2 - R^2}\ \right\}$$

$$M_{21} = M_{12} = M = \mu_0\ \left\{a\ -\ \sqrt{a^2 - R^2}\ \right\}$$

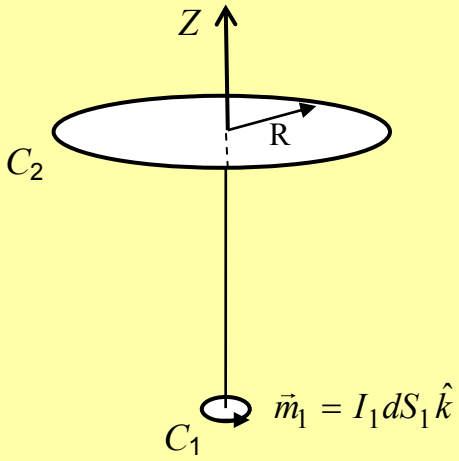
Ejemplo 11. Dado un circuito muy pequeño (C_1) con momento dipolar $\vec{m}_1 = I_1\, dS_1\, \hat{k}$ ubicado en el origen de coordenadas y una espira circular (C_2) de radio R con centro en $(0,\ 0,\ D)$. Hallar:

a) el potencial vectorial magnético debido a C_1 en puntos de C_2,

b) el flujo magnético a través de C_2 debido a corriente I_1 en C_1,

c) la inductancia mutua M_{12},

d) el flujo del campo **B** debido a I_2 de circuito C_2 a través de área limitada por C_1,



Solución:

a) $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{m} \times \frac{\left(D\,\hat{k} + R\,\hat{e}_\rho\right)}{(R^2 + D^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\,R}{(R^2 + D^2)^{3/2}}\,\hat{e}_\phi$$

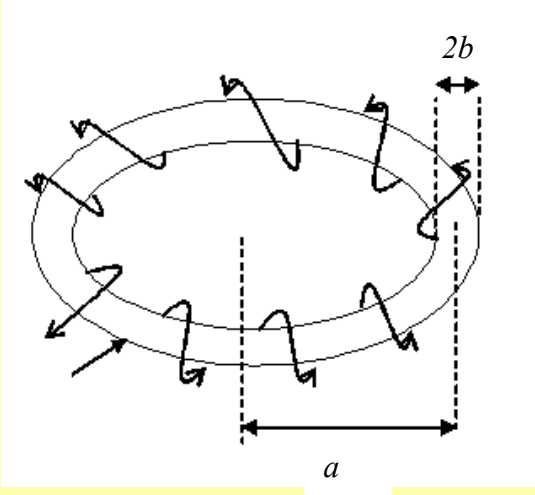
b) $$\Phi_{21} = \iint_{S2} \vec{B} \bullet d\vec{a} = \iint_{S2} \text{rot}\,\vec{A} \bullet d\vec{a} = \oint_{C2} \vec{A} \bullet d\vec{\ell}$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\,R\,(2\pi R)}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0}{2}\,I_1\,dS_1\,\frac{R^2}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}$$

c) $$\boxed{M_{21} = \frac{\mu_0}{2}\;dS_1\;\frac{R^2}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}}$$

d) $$\Phi_{12} = \frac{\mu_0}{2}\,I_2\;\frac{R^2}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}\,dS_1 \Rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0}{2}\,dS_1\,\frac{R^2}{\left(R^2 + D^2\right)^{3/2}}$$

Ejemplo 12. La sección transversal de una región toroidal es un círculo de radio b y su radio central es a. Hallar la autoinductancia de un devanado con *N* espiras uniformemente espaciadas en la superficie de la región toroidal



Solución:

El campo **B** en cualquier punto dentro del toroide es:

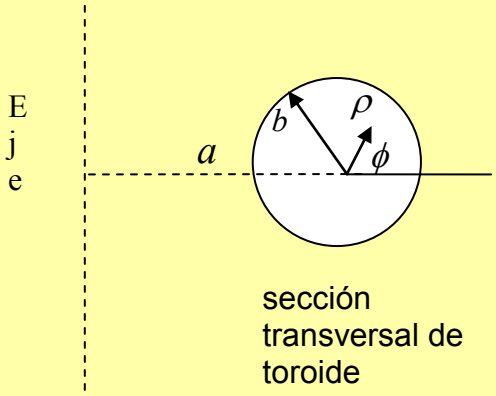
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\hat{e}_\phi$$

donde r es la distancia al eje central.

Es conveniente escribir r como:

$$r = a + \rho\cos\phi$$

con ρ variando entre 0 y b; y ϕ variando entre 0 y 2π.



sección transversal de toroide

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\left(a+\rho\text{Cos}\phi\right)}\hat{e}_\phi$$

El flujo del campo de todo el toroide a través de una espira del toroide es:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_0^b\int_0^{2\pi}\frac{\rho\, d\rho\, d\phi}{\left(a+\rho\text{Cos}\phi\right)} \Rightarrow \Phi_1 = \mu_0 NI\left[a-\sqrt{a^2-b^2}\right]$$

y el flujo del campo del toroide a través de todas las espiras del toroide:

$$\Phi_{\text{total}} = \mu_0 N^2 I\left\{a-\sqrt{a^2-b^2}\right\}$$

y la autoinductancia es entonces:

$$L = \mu_0\, N^2\left\{a-\sqrt{a^2-b^2}\right\}$$

PROBLEMAS

1. Considere un toroide circular de radio central a y radio de la sección transversal b donde b es mucho menor que a de modo que el módulo del campo **B** se puede considerar constante dentro del toroide.

a) Halle la autoinductancia del toroide en esta aproximación.

b) Verifique, bajo las condiciones de este enunciado, que el resultado del ejemplo (12) llega a ser el mismo que el obtenido en (a).

2. Considere un alambre de longitud infinita con corriente constante I a lo largo del eje *Y* y una espira rectangular de lados a y b en el plano *XY* con el lado a paralelo al alambre a una distancia x de él. Si la espira se desplaza con velocidad constante $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\,\hat{e}_x$, calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira:

a) Calculando directamente la derivada del flujo

b) Usando el concepto de campo eléctrico inducido por movimiento.

3. Considere un alambre de longitud infinita con corriente constante I a lo largo del eje *Y* y una espira circular radio R en el plano *XY* con su centro a una distancia x del alambre. Si la espira se desplaza con velocidad constante $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\,\hat{e}_x$, calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira.

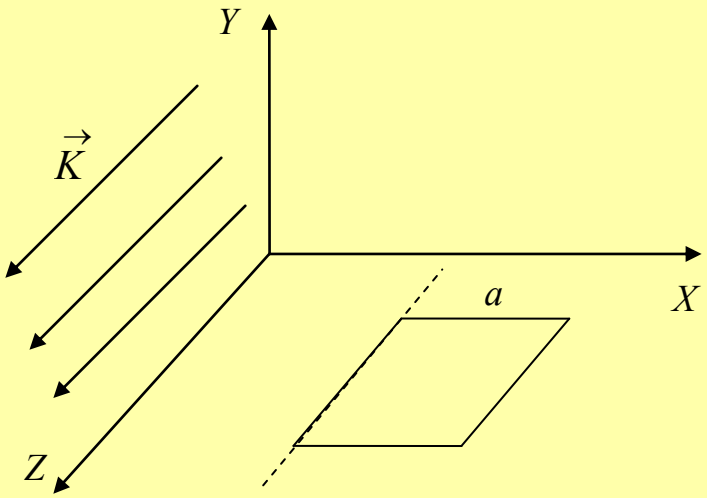
4. Una espira rectangular de resistencia R y autoinductancia L está colocada en el plano *XY*. Hallar la corriente inducida en esta espira por una corriente $\mathrm{i}_1(t) = 10\,\mathrm{Sen}\omega t$ ampere que circula en un alambre muy largo que coincide con el eje *Y*.

5. Una varilla de longitud ℓ es colocada perpendicularmente a un alambre muy largo por el que circula una corriente I constante. Si la varilla se desplaza con velocidad $\vec{\mathrm{v}}$ constante en la dirección de la corriente, hallar la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla.

6. Una barra conductora de resistencia despreciable oscila sobre dos rieles paralelos también de resistencia despreciable en una región donde el campo inducción magnética está dado por $\vec{B} = \hat{e}_z 10\,\mathrm{Cos}\,\omega t\ T$. Si una resistencia de 2 Ω está fija al extremo izquierdo de los rieles y la posición de la barra está dada por: $x = 0,3 + 0,2\mathrm{Cos}\,\omega t\ \mathrm{m}$, hallar la corriente que circula a través de la resistencia.

7. Una corriente superficial $\vec{K} = \hat{e}_z 5\,\mathrm{Sen}(120\pi t)\ \mathrm{A/m}$ circula por el plano *YZ*. Una espira cuadrada de lado a = 0,1 m está ubicada en el plano *XZ*. Dé una expresión para la fuerza electromotriz inducida sobre la espira

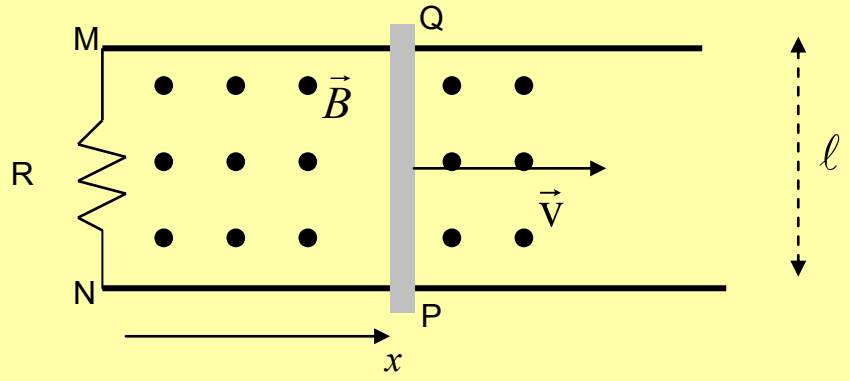
a) si la espira está fija en su posición
b) si se desplaza con velocidad $\vec{\mathrm{v}} = 5\ \mathrm{m/s}\ \hat{e}_x$
c) si rota con velocidad angular $\vec{\omega} = 10\ \mathrm{rad/s}\ \hat{e}_z$ con respecto a uno de sus lados.



8. Una barra metálica se desliza con velocidad constante $\vec{\mathrm{v}}$ sobre un par de rieles conductores en un campo magnético $\vec{B} = \hat{e}_z\ B_0$ como se ilustra en la figura

a) Determine el voltaje V_0 que se induce en circuito abierto entre los terminales 1 y 2.
b) Suponiendo que se conecta una resistencia R entre los terminales, calcule la potencia eléctrica disipada en R.

c) Demuestre que esta potencia eléctrica es igual a la potencia mecánica necesaria para mover la barra deslizante con velocidad v. Ignore la resistencia eléctrica de la barra móvil y de los rieles conductores. Ignore también la fricción mecánica en los puntos de contacto.



9. Un freno electromagnético consiste de un disco de conductividad g y espesor t rotando alrededor de un eje que pasa por su centro y perpendicular a la superficie del disco. Un campo uniforme $\vec{B}$ es aplicado perpendicular al plano del disco sobre una pequeña área a ubicada a una distancia ρ del eje del disco. Hallar el valor del torque que tiende a frenar el disco en un instante en que su velocidad angular es ω.

10. Por un alambre muy largo que coincide con el eje *Y* circula una corriente variable con el tiempo: $I = 25e^{-t/T}$ A. Una espira circular de radio b yace en el plano *XY* con su centro ubicado en el punto $(a,0,0)$. Si la resistencia eléctrica de la espira es 2,0 ohms, hallar la corriente inducida en ella.

11. Encontrar la fuerza electromotriz producida por un generador homopolar de 1,0 m de radio que rota a 3600 revoluciones por minuto en un campo inducción magnética B de 0,5 T.

12. Calcule la inductancia mutua de dos solenoides que ocupan el mismo espacio con números de espiras N_1 y N_2 y corrientes I_1 y I_2.

CAPITULO 11

ENERGÍA MAGNÉTICA

11.1 INTRODUCCIÓN

Podemos comenzar este capítulo definiendo energía magnética como el trabajo necesario para establecer un campo magnético B en una determinada región del espacio. Puesto que las fuentes del campo magnético son las corrientes eléctricas, la definición dada es equivalente a decir que energía magnética es el trabajo necesario para establecer un circuito o un sistema de circuitos de corriente eléctrica. Para concretar la idea, consideremos el circuito abierto de la figura 1. Ya se sabe que al cerrar el interruptor S tendremos una corriente

$$I = \frac{V}{R}$$

El concepto de energía magnética se entiende mejor si pensamos que el proceso de corriente cero a corriente V/R no es instantáneo sino que dura un tiempo T finito, muy corto, pero no nulo. Durante este proceso la corriente va cambiando y el flujo magnético a través del mismo circuito también va cambiando. Este cambio produce una fuerza electromotriz que se opone al cambio. La energía magnética es el trabajo contra esta fuerza electromotriz, o lo que es lo mismo, contra el campo eléctrico inducido.

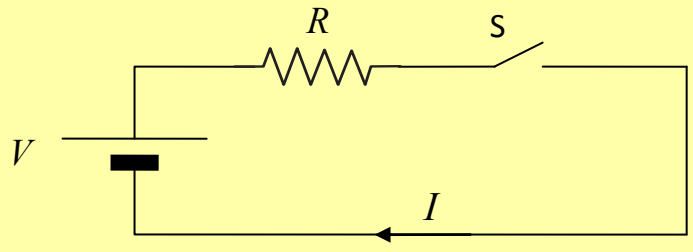


Fig. 1 Circuito elemental de corriente continua. Al cerrar el interruptor se tendrá corriente I = V/R, pero el proceso no es instantáneo.

NOTA: Usaremos la notación $i(t)$ y $\phi(\mathrm{t})$ para valores instantáneos de corriente y flujo durante el proceso. Para los valores establecidos finalmente usaremos I y Φ.

11.2 ENERGÍA MAGNÉTICA DE UN CIRCUITO DE CORRIENTE CONTINUA

Durante el proceso de establecimiento de la corriente I al cerrar el interruptor en el circuito de la figura 1, su comportamiento es como el de la figura 2. La primera ley de Kirchhoff nos permite escribir:

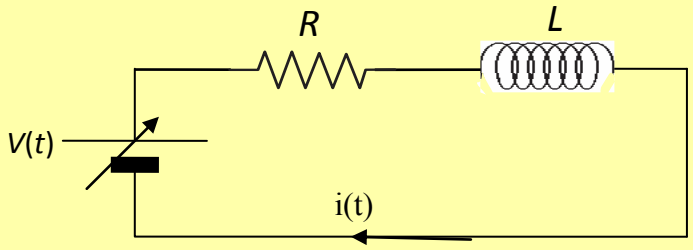


Fig. 2 Un circuito simple de una batería y una resistencia se comporta como un circuito *LR* durante el proceso de establecimiento de la corriente.

$$V - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

y al multiplicar por dq el primer término y por $i\,dt$ los otros, se obtiene:

$$V\,dq = i^2\,R\,dt + L\,i\,di$$

que se puede interpretar diciendo que el término de la izquierda es el trabajo total hecho por la batería, el primer término de la derecha es el trabajo perdido por efecto Joule y el segundo término de la derecha es el trabajo hecho por la batería contra la fem inducida, es decir, la energía magnética almacenada en el sistema en el intervalo de tiempo en que la corriente varía de i a $i + di$, por lo tanto:

$$dW_b = dU_M = L\,i\,di \qquad \text{ó} \qquad dW_b = dU_M = i\,d\phi\,. \tag{1}$$

Suponiendo medios lineales e integrando entre $i = 0$ e $i = I$, se obtiene:

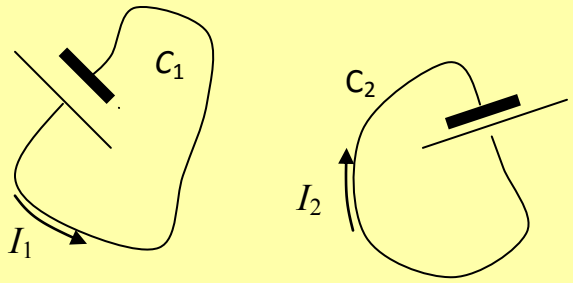
$$\boxed{U_M = \frac{1}{2}LI^2} \tag{2}$$

que se puede escribir también en la forma:

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \qquad \text{ó} \qquad U_M = \frac{1}{2}I\Phi$$

11.3 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE DOS CIRCUITOS EN MEDIOS L.I.H.

Si se tienen dos circuitos con corrientes inicialmente nulas y que finalmente tendrán corrientes estacionarias I_1 e I_2. Durante el proceso del establecimiento de de estas corrientes se tendrá que las fuentes externas (baterías) harán trabajo contra la fuerza electromotriz inducida en cada circuito, dado por las ecuaciones:



$$dU_{M1} = \xi_1 dq_1 = \frac{d\phi_1}{dt} i_1 dt = i_1 d\phi_1 \tag{3a}$$

$$dU_{M2} = \xi_2 dq_2 = \frac{d\phi_2}{dt} i_2 dt = i_2 d\phi_2 \tag{3b}$$

Teniendo en cuenta que:

$$d\phi_1 = L_1 di_1 + M_{12} di_2 \tag{4a}$$

$$d\phi_2 = M_{21} di_1 + L_2 di_2 \tag{4b}$$

y reemplazando las ecuaciones (4) en las (3) se obtiene:

$$dU_{M1} = i_1 d\phi_1 = M_{12} i_1 di_2 + L_1 i_1 di_1$$

$$dU_{M2} = i_2 d\phi_2 = M_{21} i_2 di_1 + L_2 i_2 di_2$$

Puesto que la energía magnética depende de los valores finales de corriente más no del modo cómo se llegue a ellos, para integrar podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las corrientes en los dos circuitos se establecen simultáneamente en el intervalo de tiempo $(0,T)$ y que las corrientes varían linealmente con el tiempo, de modo que:

$$i_1(t) = \frac{t}{T} I_1 \quad , \quad i_2(t) = \frac{t}{T} I_2 \quad \Rightarrow \quad di_1(t) = \frac{dt}{T} I_1 \ , \ di_2(t) = \frac{dt}{T} I_2$$

$$U_M = U_{M1} + U_{M2} = \int_0^T \frac{t\, dt}{T^2} \left(M_{12} I_1 I_2 + L_1 I_1^2 + M_{21} I_2 I_1 + L_2 I_2^2 \right)$$

Teniendo en cuenta que $M_{12} = M_{21} = M$

$$\boxed{U_M = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2} \qquad (5)$$

Ejemplo 1 Demostrar que la inductancia mutua y las autoinductancias de dos circuitos acoplados se relacionan por:

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Solución: Definiendo $x = \frac{I_1}{I_2}$, La ecuación (5) se puede escribir como:

$$U_M = \frac{1}{2} I_2^2 \left(L_1 x^2 + 2Mx + L_2 \right)$$

Derivando con respecto a x se observará que:

$$\frac{dU_M}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{M}{L_1}$$

$$\frac{d^2 U_M}{dx^2} = L_1 I_2^2 > 0$$

El valor de la energía magnética es mínimo cuando $x = -\frac{M}{L_1}$ y es:

$$U_M = \frac{1}{2} I_2^2 \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) \geq 0$$

porque la energía magnética siempre es positiva o cero. Se obtiene así el resultado buscado.

11.4 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE n CIRCUITOS EN MEDIOS l.i.h

Para calcular la energía magnética de un sistema de *n* circuitos inmersos en medios lineales, isotrópicos y homogéneos podemos hacer las mismas hipótesis que en la sección anterior donde calculamos la energía magnética de dos circuitos.

Suponemos que un sistema de fuentes externas (baterías) hace trabajo simultáneamente contra la fuerza electromotriz inducida en los *n* circuitos

$$dW_b = dU_M = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, i_j \, dt = \sum_{j=1}^{n} i_j \, d\phi_j \tag{6}$$

donde: $$d\phi_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{d\phi_{jk}}{di_k} di_k = \sum_{k=1}^{n} M_{jk} \, di_k$$

Para efectuar la integración suponemos que en todos los circuitos los valores de las corrientes pasan de 0 a I_j en forma lineal con el tiempo, es decir:

$$i_j(t) = \frac{t}{T} I_j \qquad di_j(t) = \frac{dt}{T} I_j \qquad d\phi_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{dt}{T} M_{jk} \, I_k = \frac{dt}{T} \Phi_j \tag{7}$$

Reemplazando (7) en (6) se tiene:

$$U_M = \int \sum_j i_j \, d\phi_j = \int_0^T \frac{t}{T} \frac{dt}{T} \sum_{j=1}^{n} I_j \, \Phi_j$$

y efectuando la integral respecto al tiempo:

$$\boxed{U_M = \frac{1}{2} \sum_j I_j \, \Phi_j} \tag{8}$$

que también se puede escribir en la forma:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{jk} \, I_k \, I_j$$

11.5 ENERGÍA MAGNÉTICA EN TÉRMINOS DE LOS CAMPOS B Y H

La expresión para la energía magnética obtenida en la sección anterior (ec. (8)) se puede transformar en una expresión que nos dé la energía en términos de los campos **B** y **H**. Para ello comenzamos expresando el flujo magnético en términos del potencial vectorial magnético

$$\Phi_j = \iint_{S_j} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \iint_{S_j} \text{rot}\, \vec{A} \cdot d\vec{a} = \oint_{C_j} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

La ec. (8) se puede escribir ahora como:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_j \oint_{C_j} \vec{A} \cdot I_j \, d\vec{\ell}_j$$

y teniendo en cuenta que siempre es posible usar la identidad: $I\, d\vec{\ell} = \vec{J}\, dV$

$$U_M = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \vec{A} \cdot \vec{J}\, dV \quad \Rightarrow \quad U_M = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \vec{A} \cdot \text{rot}\, \vec{H}\, dV$$

Notar que estrictamente la integral debería efectuarse sobre el volumen donde exista densidad de corriente, sin embargo extender la integral a todo el espacio es correcto porque sólo estamos sumando cero. Usando la identidad vectorial $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot}\, \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\, \vec{H}$ obtenemos:

$$U_M = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \left(\vec{H} \cdot \text{rot}\, \vec{A}\right) dV - \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \left\{ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H})\, dV \right\}$$

y por teorema de la divergencia:

$$U_M = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} (\vec{H} \cdot \text{rot}\, \vec{A})\, dV - \frac{1}{2} \oiint_{S_\infty} (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a}$$

donde S_∞ es una superficie en infinito, es decir, muy alejada de las fuentes del campo. Luego:

$$\boxed{U_M = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo el espacio}} \vec{B} \cdot \vec{H}\, dV} \qquad (9)$$

Densidad de energía magnética: La ecuación (9) puede interpretarse diciendo que la energía magnética está distribuida en todo el espacio, de modo que en cada elemento de volumen dV hay una cantidad de energía:

$$dU_M = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,dV$$

Así pues la cantidad

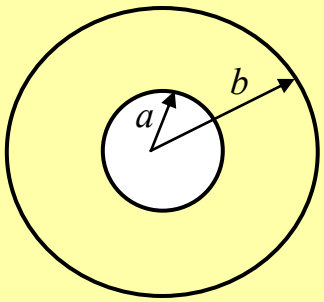
$$\boxed{u_M = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}} \qquad (10)$$

queda definida como densidad de energía magnética.

Para medios l.i.h: $$u_M = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (10a)$$

Ejemplo 2. Un cable coaxial está formado por dos superficies cilíndricas conductoras de longitud ℓ, de espesor despreciable, de radio interno a, radio externo b $(\ell >> b > a)$. Por este cable circula una corriente I. Calcule: a) la energía magnética del sistema, b) la autoinductancia.

Solución:



Sección transversal de cable coaxial

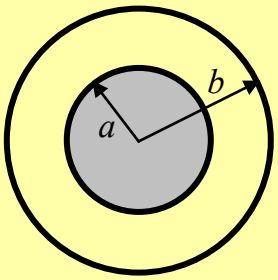
$$H = \begin{cases} 0 & , \quad r < a \\ \dfrac{I}{2\pi r} & , \quad a < r < b \\ 0 & , \quad r > b \end{cases}$$

$$U_M = \frac{1}{2}\iiint_{\text{todo el espacio}} \mu_0 H^2\,dV \;\Rightarrow\; U_M = \frac{1}{2}\mu_0\int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r\ell\,dr$$

$$\boxed{U_M = \frac{\mu_0}{4\pi}\ell I^2 \ln\frac{b}{a}} \quad = \quad \frac{L I^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ell \ln\frac{b}{a}}$$

Ejemplo 3 . Un cable coaxial está formado por un cilindro macizo conductor de radio a y una superficie conductora de radio b ($a < b$). Por este cable circula una corriente I. Calcule: a) la energía magnética del sistema, b) la autoinductancia.

Solución:



Sección transversal de cable coaxial

$$H = \begin{cases} \dfrac{I\,r}{2\pi a^2} & , \quad r < a \\ \dfrac{I}{2\pi r} & , \quad a < r < b \\ 0 & , \quad r > b \end{cases}$$

$$U_M = \frac{1}{2}\mu_0 \left\{ \int_0^a \left(\frac{I\ r}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi \ell\, r\, dr + \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi \ell\, r\, dr \right\}$$

$$\boxed{U_M = \frac{\mu_0}{4\pi}\ell I^2 \left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a} \right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a} \right)}$$

11.6 CÁCULO DE FUERZAS Y TORQUES A PARTIR DE LA ENERGÍA

Se puede desarrollar un método para calcular fuerzas magnéticas sobre diversos elementos de un sistema magnetostático a partir del conocimiento de la energía magnética del sistema.

Supongamos por ejemplo un sistema de circuitos rodeados de medios lineales isotrópicos y homogéneos. Si estamos interesados en calcular la fuerza sobre un elemento del sistema, nos preguntamos ¿qué pasaría si dejáramos libre al elemento de interés de modo que éste experimente un desplazamiento $d\vec{\ell}$?

Caso 1: Desplazamiento virtual manteniendo las corrientes constantes

La respuesta es, suceden tres cosas: (i) La fuerza incógnita haría trabajo

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{\ell} \qquad (11)$$

(ii) La energía magnética del sistema disminuiría, según ec (8), en la cantidad:

$$\left(dU_M\right)_I = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j\, d\Phi_j \tag{12}$$

(iii) Ambas pérdidas de energía son a expensas del trabajo hecho por el sistema de baterías que harían, de acuerdo con ec. (6), un trabajo:

$$dW_b = \sum_{j=1}^{n} I_j\, d\Phi_j \tag{13}$$

El balance de conservación de energía es entonces:

$$dW_b = dW + \left(dU_M\right)_I \tag{14}$$

reemplazando las ecs. (12) y (13) en (14) se obtiene:

$$dW = \left(dU_M\right)_I \tag{15}$$

De las ecuaciones (11) y (15) se deduce que:

$$\vec{F} = \left(\vec{\nabla} U_M\right)_I \quad \text{ó} \quad F_x = \left(\frac{\partial U_M}{\partial x}\right)_I \tag{16}$$

Si el objeto sólo tiene libertad para girar con respecto a un eje:

$$\tau_x = \left(\frac{\partial U_M}{\partial \theta_x}\right)_I \tag{17}$$

Caso 2. Desplazamiento virtual con flujos magnéticos constantes

Si suponemos flujos constantes, de acuerdo con ec. (6) las baterías no hacen trabajo y por lo tanto se trata de un sistema aislado. La ec (14) se escribirá ahora:

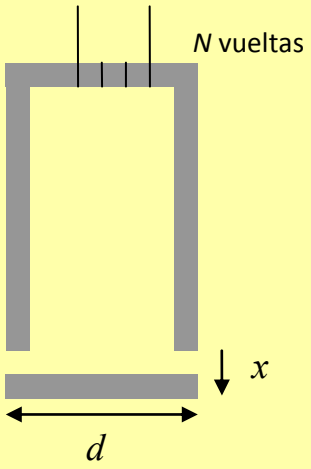
$$dW = -\left(dU_M\right)_\Phi \tag{18}$$

de modo que el cálculo de fuerzas o torques se hará usando:

$$F_x = -\left(\frac{\partial U_M}{\partial x}\right)_\Phi \quad \text{ó} \quad \tau_x = -\left(\frac{\partial U_M}{\partial \theta_x}\right)_\Phi \tag{19}$$

Ejemplo 4. Un electroimán que tiene forma de U, de longitud ℓ, separación de polos d y permeabilidad μ, tiene una sección transversal cuadrada de área A. Se enrolla N vueltas de alambre por las que circula una corriente I. Calcule la fuerza con la que el imán sostiene contra sus polos una barra del mismo material (de la misma sección transversal).

Solución



Cálculo del campo B:

$$NI = H_{fierro}(\ell + d) + H_{aire}(2x) \qquad \text{(i)}$$

$$H_{fierro} = \frac{B}{\mu} \qquad \text{(ii)}$$

$$H_{aire} = \frac{B}{\mu_0} \qquad \text{(iii)}$$

Reemplazando (ii) y (iii) en (i) se obtiene:

$$B = \frac{NI}{\left(\dfrac{\ell + d}{\mu} + \dfrac{2x}{\mu_0}\right)} \qquad \text{(iv)}$$

Cálculo de la energía:

$$U_M = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H}\, dV \quad \Rightarrow \quad U_M = \frac{1}{2}\left\{ \frac{N^2 I^2 A}{\left(\dfrac{\ell + d}{\mu} + \dfrac{2x}{\mu_0}\right)^2}\left[\frac{(\ell + d)}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right]\right\}$$

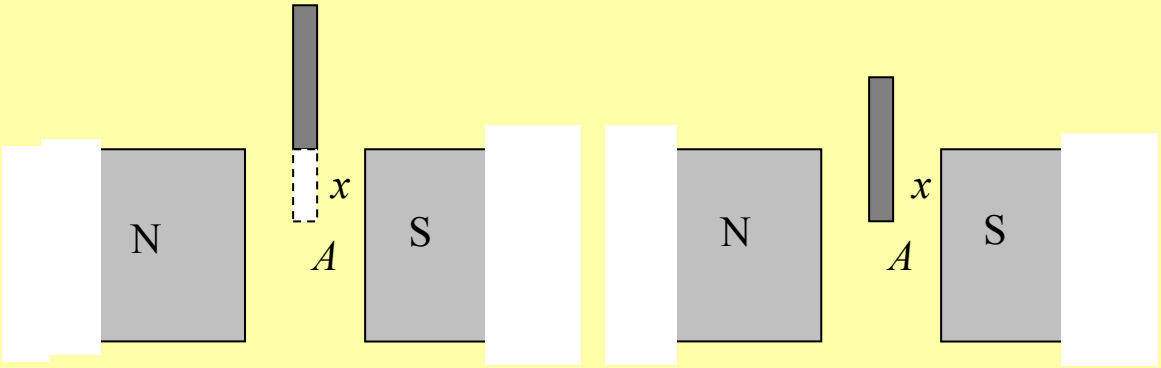
Cálculo de la fuerza

$$\vec{F} = \left.\frac{\partial U_M}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\mu^2 N^2 I^2 A}{\mu_0 (\ell + d)^2}\hat{e}_x$$

Ejemplo 5. El campo de inducción magnética entre los polos de un imán es relativamente uniforme y se mantiene al valor constante $\mathbf{B}_0$. Una placa paramagnética delgada que sólo puede moverse verticalmente se coloca en el campo como se muestra en la figura. La susceptibilidad de la placa es χ_m y su área de sección transversal es *A*. (a) Calcule la fuerza sobre la placa. (b) Obtenga un valor numérico para la fuerza si el material de la plancha es titanio, $A = 1\text{cm}^2$ y $B_0 = 0{,}5$ T.

Solución:

Para calcular la fuerza usando el concepto de energía nos preguntamos cuál es el cambio de energía entre una situación 1) donde la varilla todavía no penetra al campo y una 2) donde ha entrado una longitud x.



La diferencia está en el volumen ocupado por el trozo A x de varilla:

En la situación 1: $U_{M1} = \frac{1}{2} B H_1 A x$

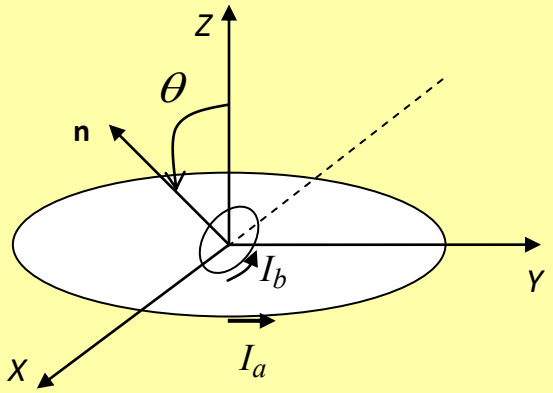
En la situación 2: $U_{M2} = \frac{1}{2} B H_2 A x$

$$\Delta U_M = \frac{1}{2} B (H_2 - H_1) A x = \frac{1}{2} B_0 \left\{ \frac{B_0}{(1+\chi_m)\mu_0} - \frac{B_0}{\mu_0} \right\} A x$$

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U_M}{\partial x} \right)_\Phi = \frac{1}{2} B_0^2 A \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0} \hat{e}_x$$

Ejemplo 6. Un circuito en forma de una espira circular de alambre de radio b se coloca en el centro de una espira de radio más grande de radio a, (b << a). El circuito pequeño se pone de modo que pueda girar libremente en torno de uno de sus diámetros, localizándose ese diámetro en el plano del circuito mayor. Los circuitos conducen corrientes I_a e I_b, respectivamente. (a) Cuando el ángulo entre los dos circuitos es θ, calcule el torque sobe el circuito móvil. (b) ¿Qué dirección tiene este torque cuando I_a e I_b circulan en el mismo sentido.

Solución:



$$U_M = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

$$\tau = \left(\frac{\partial U_M}{\partial \theta}\right)_I$$

Los dos primeros términos de la energía son constantes.

$$\tau = \frac{\partial}{\partial \theta}(M\, I_a\, I_b) = \frac{\partial}{\partial \theta}(I_b\, \Phi_{ba}) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(I_b \left\{\pi\, b^2\, B_a(0)\, \mathrm{Cos}\,\theta\right\}\right)$$

$$\tau = -\frac{\mu_0}{2a} I_a I_b\, \pi\, b^2\, \mathrm{Sen}\,\theta$$

(El signo menos indica que el torque es en el sentido en que θ disminuye)

11.7 ENERGÍA DE INTERACCIÓN DE UN CIRCUITO CON CAMPO B EXTERNO

El tema que abordamos en esta sección es análogo al problema de calcular la energía de interacción entre un pequeño sistema de cargas eléctricas en presencia de un campo eléctrico externo (sección 6.6). En el ejemplo 6 de este capítulo ya hemos visto que para calcular la fuerza o torque sobre un circuito no es necesario calcular la energía de todo el sistema sino solamente el término: $M I_1 I_2$. Es apropiado llamar a este término **energía de interacción magnética**, $U_{\text{int}\,M}$. Esta idea se puede generalizar para el caso en que necesitemos hallar la energía de interacción de un circuito C con el campo $\vec{B}_{ext}$ producido por todas las otras fuentes existentes en el universo.

$$U_{\text{int}\,M} = I\,\Phi_{ext} \tag{20}$$

donde Φ_{ext} es el flujo de $\vec{B}_{ext}$ a través de cualquier superficie *S* limitada por el circuito *C*. Es decir:

$$U_{\text{int}\,M} = I \iint \vec{B}_{ext}(\vec{r}) \bullet d\vec{a}$$

Si expandimos en una serie de Taylor el campo $\vec{B}_{ext}$

$$\vec{B}_{ext}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + (\vec{r} \bullet \vec{\nabla})\,\vec{B}\Big|_{x=0} + \ldots$$

y si el circuito es lo suficientemente pequeño, podemos considerar sólo el primer término y obtenemos:

$$U_{\text{int}\,M} = I \iint_S \vec{B}_{ext}(0) \bullet d\vec{a}$$

$$\boxed{U_{\text{int}\,M} = \vec{m} \cdot \vec{B}} \tag{21}$$

La fuerza sobre el circuito debido al campo externo se puede escribir usando la ec. (16) ya que el circuito está identificado con un valor de corriente.

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \tag{22}$$

NOTA: Hay una diferencia en el signo respecto a la energía de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo (ecuación (51) del capítulo 6). Esta diferencia se puede evitar definiendo para el dipolo magnético energía orientacional como

$$U' = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Con lo cual nuestro resultado para la fuerza no cambia pero también se puede escribir como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U' = -\vec{\nabla}\left(-\vec{m} \cdot \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right)$$

Caso Particular: Energía de interacción magnética dipolo-dipolo

Puesto que el campo inducción magnética $\vec{B}$ en un punto $\vec{r}$ debido a un dipolo en el origen de coordenadas está dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right\}$$

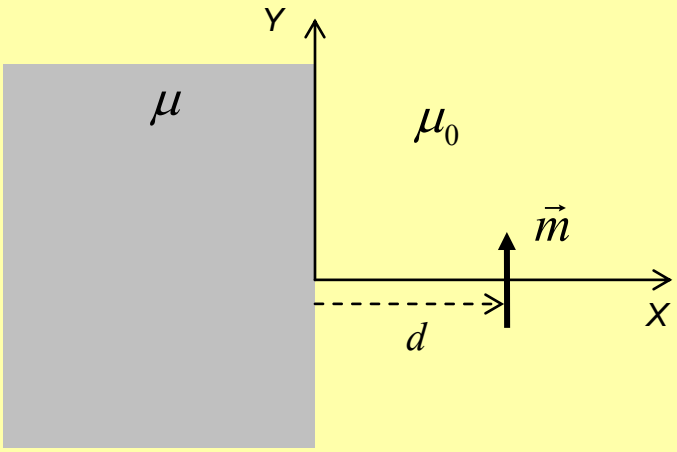
entonces, la energía de interacción de un dipolo $\vec{m}'$ ubicado en $\vec{r}$ es:

$$U_{dip-dip} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\,\vec{m}' \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m} \cdot \vec{m}'}{r^3}\right\} \tag{23}$$

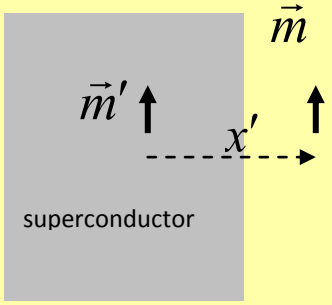
Ejemplo 7. Hallar la energía de interacción y la fuerza sobre el dipolo magnético $\vec{m}$ debido al campo producido por el medio semi infinito que ocupa la región del espacio $x < 0$ como se muestra en la figura en los dos siguientes casos:

a) cuando el medio es superconductor ($\mu = 0$)

b) cuando el medio es ferromagnético perfecto ($\mu \to \infty$)



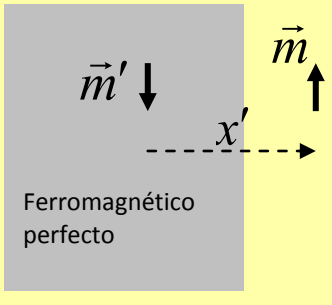
Solución: (a) De acuerdo con el problema (7) del capítulo 9, el campo $\vec{B}$ que actúa sobre $\vec{m}$ debido al material superconductor es equivalente al de un dipolo $\vec{m}' = \vec{m}$ ubicado en $(-x, 0, 0)$. Con lo cual, las ecs. (21) y (23) nos llevan a:



$$U_{\text{int}\,M} = \vec{m} \bullet \vec{B} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{int}\,M} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m^2}{(x')^3}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0}{64\pi}\frac{3\,m^2}{d^4}\hat{e}_x,}$$ fuerza repulsiva.

(b) De acuerdo con el problema (7) del capítulo 9, el campo $\vec{B}$ que actúa sobre $\vec{m}$ debido al medio ferromagnético perfecto es equivalente al de un dipolo $\vec{m}' = -\vec{m}$ ubicado en $(-x, 0, 0)$. Con lo cual, las ecs. (21) y (23) nos llevan a:

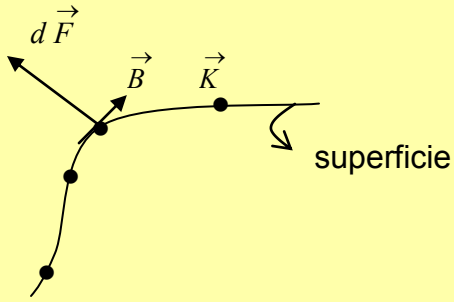


$$U_{\text{int}\,M} = \vec{m} \bullet \vec{B} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{int}\,M} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m^2}{(x')^3}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0}{64\pi}\frac{3\,m^2}{d^4}\hat{e}_x}$$ fuerza atractiva.

11.8 PRESIÓN MAGNÉTICA

Si a través de una superficie circula una corriente $\vec{K}$ y si el campo inducción magnética es nulo en uno de los lados adyacentes a la superficie, entonces el campo $\vec{B}$ del otro lado ejerce una fuerza $d\vec{F}$ sobre el elemento $\vec{K}\,da$ y en consecuencia una presión sobre la superficie.



En realidad el campo $\vec{B}$ es en parte debido al elemento de corriente $\vec{K}\,da$. Esa contribución no ejerce fuerza sobre el mismo elemento. La fuerza es sólo ejercida por un campo efectivo:

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B}_{ef}\, da$$

Similarmente a la fuerza sobre un elemento de área en un conductor con carga electrostática donde se mostró que $\vec{E}_{ef} = 0{,}5\vec{E}$, puede mostrarse que

$$\vec{B}_{ef} = 0{,}5\vec{B}$$

Con lo cual se obtiene que la presión ejercida por el campo magnético es :

$$P_{mag} = \frac{1}{2}\left|\vec{K} \times \vec{B}\right|$$

Y aplicando las condiciones de frontera, ec (19) de capítulo 9, obtenemos:

$$\boxed{P_{mag} = \frac{B^2}{2\mu}}$$

La presión magnética coincide numéricamente con la densidad de energía.

Ejemplo 8. ¿Cuál es la presión magnética sobre una cáscara cilíndrica de longitud infinita, de radio R y espesor despreciable por la cual circula una corriente I ?

Solución:

De acuerdo con el ejemplo 6 del capítulo 8:

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\ \hat{e}_\phi & , \quad \text{si} \quad r > R \\ 0 & , \quad \text{si} \quad r < R \end{cases}$$

Entonces, la presión magnética será:

$$P_{mag} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$$

Presión que trata de comprimir el radio del cilindro. Si I = 10,0 A y R = 0,01 m; la presión será: $P_{mag} = 0{,}016$ Pascales. Recuerde que $P_{atm} = 10^5$ Pascales

11.9 PÉRDIDAS POR HISTÉRESIS

Si una barra de material ferromagnético de forma cilíndrica, toroidal u otra es usada como núcleo de una bobina o solenoide y si la corriente eléctrica de la bobina se hace variar cíclicamente, entonces, durante el tiempo que dure un ciclo, los valores de H y B dentro del material van cambiando pero al principio y final de cada ciclo los valores de H, B y la densidad de energía son los mismos. Para efectuar los cambios durante cada ciclo las fuentes de corriente (baterías) hacen trabajo irreversible que se pierde finalmente como calentamiento del material ferromagnético. A esto se le llaman pérdidas por histéresis. ***El valor de la energía perdida por histéresis en la unidad de volumen del material, en cada ciclo, es exactamente igual al "área" encerrada por la curva de histéresis.***

Para comprender esta afirmación es conveniente recordar la definición de energía magnética y adecuar la ec. (1) al circuito con *N* espiras ($d\phi$ es el flujo a través de una espira, *N* $d\phi$ es el flujo a través del circuito con *N* espiras)

$$dW_b = N\, i\, d\phi\,.$$

Por ley de Ampere y por definición de flujo magnético:

$$dW_b = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}\ (\Delta B)\, S$$

S es la sección transversal del solenoide.

$$dW_b = \iiint \vec{H} \cdot d\vec{B}\ dV$$

La ecuación anterior se interpreta diciendo que para modificar infinitesimalmente los campos dentro del material ferromagnético las fuentes de corriente deben hacer, por cada unidad de volumen, un trabajo

$$dw_b = \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

Si los materiales fueran lineales este resultado es equivalente a la ecuación (10a) y el trabajo hecho por las baterías en un ciclo sería nulo. Sin embargo para materiales ferromagnéticos, los cambios de H y de B se realizan siguiendo la curva de histéresis.

Para calcular el trabajo efectuado por la batería para hacer los cambios de los campos B y H en la unidad de volumen de un material ferromagnético a lo largo de un ciclo de histéresis tenemos que efectuar la integral

$$w_b = \oint_{\text{Curva de histéresis}} \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

La integral se puede efectuar por segmentos y considerando adecuadamente los signos de H y dB en cada segmento de la curva (ver figura en siguiente página) tendremos el signo del área $H\,dB$ entre la curva y el eje B.

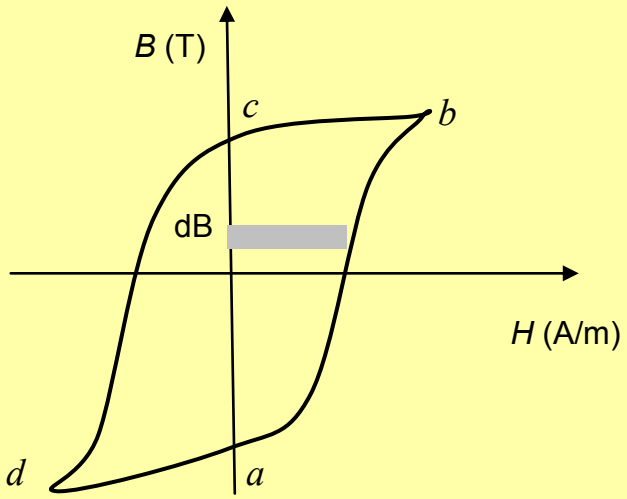
$$\int_a^b H\,dB > 0 \qquad \int_b^c H\,dB < 0$$

$$\int_c^d H\,dB > 0 \qquad \int_d^a H\,dB < 0$$

Se puede comprender entonces que la energía perdida por histéresis por unidad de volumen de material y por ciclo es exactamente el área de la curva de histéresis.

$$\oint_{\text{Curva de histéresis}} \vec{H} \bullet d\vec{B} = \int_a^b H\,dB + \int_b^c H\,dB + \int_c^d H\,dB + \int_d^a H\,dB$$

$$w_b = \oint_{\text{Curva de histéresis}} \vec{H} \bullet d\vec{B} = \text{"área" encerrada por curva de histéresis}$$



Nota 1 La información discutida aquí es muy útil para el diseño de transformadores: Hay que elegir materiales ferromagnéticos como el fierro - (4% silicio) que tienen una curva de histéresis muy larga y estrecha. Estos se llaman ferromagnéticos blandos. Los materiales con curva de histéresis ancha se llaman ferromagnéticos duros (imanes permanentes)

Nota 2 Puesto que $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ y la integral de $H\,dH$ en una trayectoria cerrada es nula se tendrá:

$$w_b = \oint_{\text{curva de histéresis}} HdB = \mu_0 \oint_{\text{curva de histéresisMH}} HdM$$

Nota 3. Puesto que $d(MH) = MdH + HdM$ entonces:

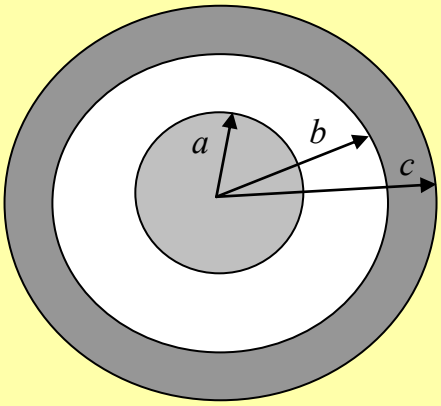
$$\oint_{\text{curva de histéresis MH}} HdM = -\oint_{\text{curva de histéresis MH}} MdH$$

PROBLEMAS

1. La figura muestra la sección transversal de un cable coaxial que está constituido por un cilindro macizo conductor de radio a y una cáscara conductora de radio interno b y radio externo c. Por este cable circula una corriente I. La longitud del cable es ℓ >> a, b, c. Calcule:

a) la energía magnética del sistema,

b) la autoinductancia.



2. Se enrollan dos devanados solenoidales en el mismo espacio por los que circulan corrientes I_1 e I_2 respectivamente

a) Calcular la energía a partir de los campos B y H

b) Calcular la energía a partir de las inductancias.

3. Hallar la fuerza que un alambre infinito ejerce sobre una espira rectangular en el mismo plano

4. Hallar la fuerza que un alambre infinito ejerce sobre una espira circular en el mismo plano

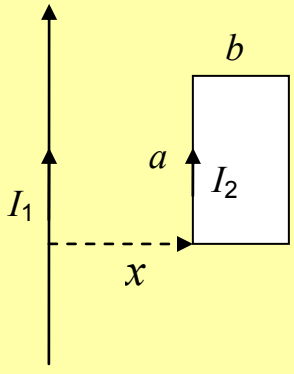


Figura problema 3

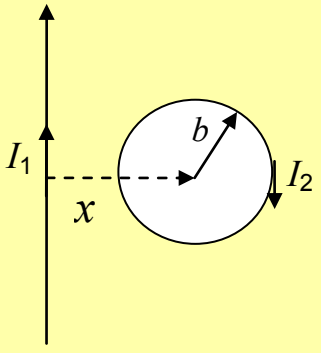
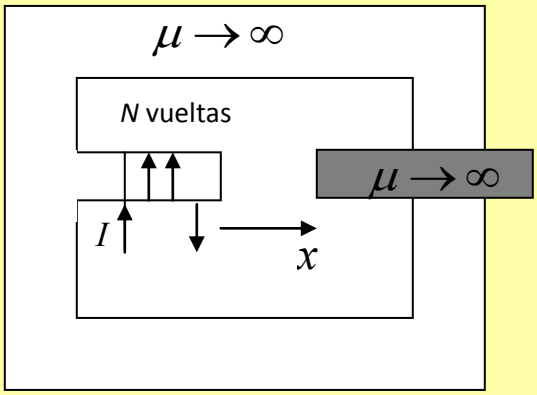


Figura problema 4

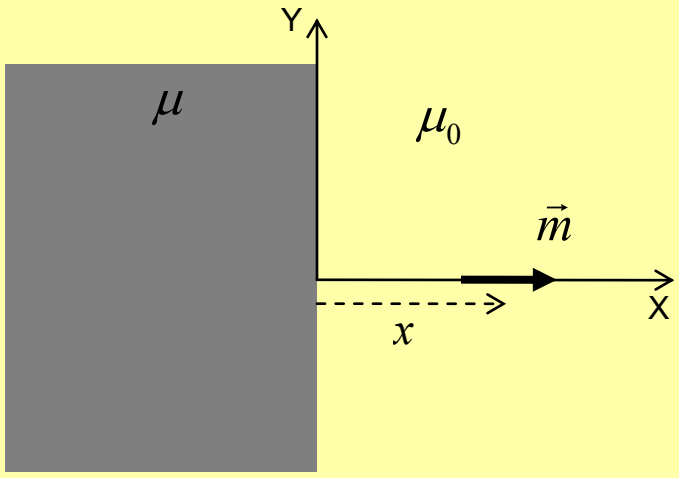
5. Encontrar la fuerza sobre la barra móvil en el circuito magnético de la figura.



6. Hallar la energía de interacción y la fuerza sobre el dipolo magnético $\vec{m}$ debido al campo producido por la magnetización del medio semi infinito que ocupa la región del espacio $x < 0$ como se muestra en la figura en los dos siguientes casos:

a) cuando el medio es superconductor $(\mu = 0)$

b) cuando el medio es ferromagnético perfecto $(\mu \to \infty)$



7. Calcular la presión magnética sobre la superficie cilíndrica de un davanado solenoidal considere radio R, longitud L (>>R), corriente I y *n* espiras por unidad de longitud. ¿ La presión magnética tiende a comprimir o a expandir al solenoide?

8. Por dos láminas conductoras paralelas circula corriente superficial. Hallar la presión magnética sobre cada una de las placas. ¿La presión acerca o aleja las láminas entre sí?

9. Por una espira circular de radio a fluye una corriente I. Un dipolo magnético de momento dipolar $\vec{m}$ se coloca a lo largo del eje del anillo en un punto a una distancia d del centro. Usando el concepto de energía, calcule la fuerza sobre el dipolo.

10. Demostrar que una espira con corriente I sometida a un campo inducción magnética $\vec{B} = C\frac{\vec{r}}{r^3}$ experimenta una fuerza: $\vec{F} = C\,I\,\vec{\nabla}\,\Omega$ donde Ω es el ángulo sólido que el circuito subtiende en el centro del campo.

11. Si por una espira circular de radio R centrada en el eje *Z* circula una corriente I, hallar la fuerza sobre la espira debida al campo $\vec{B} = C\frac{\vec{r}}{r^3}$.

12. Al obtener la ecuación (5) para la energía entre dos circuitos se supuso que las corrientes se establecen simultáneamente en un tiempo T aumentando linealmente. Suponer ahora que la dependencia es $i_j(t) = \frac{t^s}{T^s} I_j$ y obtener la misma expresión para la energía de los dos circuitos.

13. Obtenga la energía de un sistema de dos circuitos suponiendo que las impedancias no son constantes sino que varían con el valor de la corriente de acuerdo a las siguientes expresiones: $L_1 = \beta I_1^s$, $M_{12} = M_{21} = \beta\, I_1^{s/2} I_2^{s/2}$, $L_2 = \beta\, I_2^s$.

14. La pérdida de potencia por histéresis en el núcleo de un transformador es de 0,018 W/cm^3, ¿Cuál es el “área” de la curva de histéresis si la frecuencia es de 60 Hz.

CAPITULO 12

ECUACIONES DE MAXWELL

12.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo comenzaremos observando la necesidad de modificar la ley de Ampere válida para corrientes estacionarias y extender su validez a corrientes no estacionarias. Resumiremos la teoría electromagnética en 4 ecuaciones, que son fundamentales para iniciar el estudio de la propagación y radiación electromagnética. Como aplicación inmediata de estas cuatro ecuaciones deduciremos el teorema de Poynting (relación entre el flujo de energía transportada por los campos, la energía disipada en los materiales y la variación de la densidad de energía electromagnética en un medio) y deduciremos también la ecuación de onda. Las soluciones a la ecuación de onda siempre se pueden escribir como superposición de ondas armónicas. Por eso es conveniente comenzar el estudio de la propagación de radiación electromagnética escribiendo las condiciones de frontera para campos armónicamente dependientes del tiempo.

12.2 CONTRADICCIONES DE LA LEY DE AMPERE

La ley de Ampere $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$, válida para campos magnéticos creados por corrientes estacionarias, entra en contradicción con la identidad vectorial $\vec{\nabla}\bullet\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)=0$ cuando pretendemos aplicarla a campos creados por corrientes no estacionarias.

Efectivamente, para corrientes estacionarias la ecuación:

$$\vec{\nabla}\bullet\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)=\vec{\nabla}\bullet\vec{J}=0$$

es totalmente correcta, pero para corrientes no estacionarias la ley de Ampere y la ecuación de continuidad nos llevarían a:

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = \vec{\nabla} \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que es contradictoria con la identidad vectorial mencionada.

Proceso de carga de un capacitor

Otra forma de mostrar la misma contradicción se obtiene al analizar el proceso de carga de un capacitor de placas paralelas.

En la figura (1), si por el cable circula una corriente I, la forma integral de la ley de Ampere aplicada a la corriente que pasa por la superficie S_1 limitada por la trayectoria C nos lleva a:

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = \iint_{S1} \vec{J} \bullet d\vec{a} = I$$

Pero aplicada a la superficie S_2 limitada también por la trayectoria C nos lleva a:

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = \iint_{S2} \vec{J} \bullet d\vec{a} = 0$$

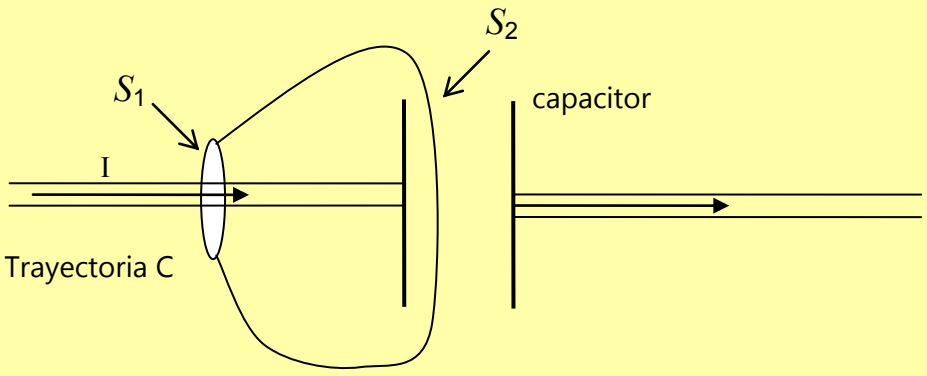


Fig. (1) Esquema para describir proceso de carga de un capacitor

12.3 LA LEY AMPERE MAXWELL

Para superar las contradicciones observadas en la sección anterior J.C. Maxwell propuso combinar la ley de Gauss $(\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho)$ con la ecuación de continuidad para obtener:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

y lo principal, propuso agregar un término al segundo miembro de la ley de Ampere:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad (1)$$

Esta ecuación es conocida como la ley Ampere-Maxwell. Su significado físico es el siguiente: Las fuentes del campo intensidad magnética H no sólo son las corrientes de transporte J sino también todos los puntos del espacio donde haya una variación del campo desplazamiento eléctrico respecto al tiempo.

Al tomar la divergencia a ambos miembros de la ec (1) se observa que se ha eliminado la contradicción de la sección anterior.

Al segundo término del segundo miembro:

$$\boxed{\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad (2)$$

se le llama densidad de corriente de desplazamiento.

La forma integral de la ec (1) es, de acuerdo con el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = I + I_d$$

donde I_d es la corriente de desplazamiento a través de una superficie limitada por la trayectoria C.

Levantamiento de la contradicción en proceso de carga del capacitor

El proceso de carga del capacitor de la figura 1 se puede explicar ahora diciendo que a través de S_2 no circula ninguna corriente de transporte pero sí circula una corriente de desplazamiento:

$$I_d = \iint_{S2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S2} \sigma \, da = I \qquad (3)$$

Ejemplo 1. a) Calcular el campo magnético **H** en función de la corriente I durante el proceso de carga de un capacitor de placas circulares, en las regiones 1,2, 3 y 4. b) Verificar las condiciones de frontera entre las regiones 1 y 2.

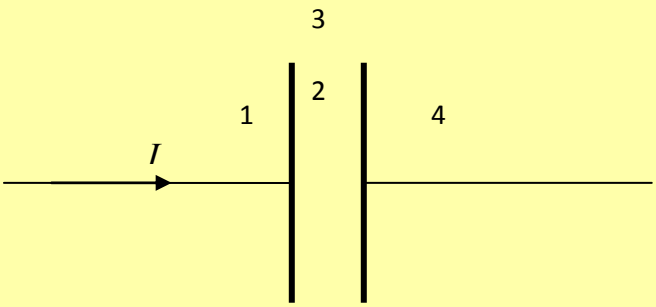


Figura 2. Campo magnético producido por corriente de desplazamiento.

Solución:

a) Suponiendo que el alambre es infinito, en la región 1 y en la región 4:

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_4 = \frac{I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

En la región 2:

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = 2\pi r H = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I_d = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$$

$$\vec{H}_2 = \frac{r}{2\pi R^2} I \, \hat{e}_\phi$$

En la región 3:

$$\vec{H}_3 = \frac{I_d}{2\pi r} \hat{e}_\phi = \frac{I}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

b) Para verificar la condición de frontera entre las regiones 1 y 2 vemos que

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r}\left[\frac{r^2}{R^2} - 1\right]\hat{e}_\phi$$

Por lo tanto:

$$\vec{K} = \hat{n} \times (\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t}) = \frac{I}{2\pi r}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]\hat{e}_\rho$$

Esta debe ser la corriente superficial que circula por la placa circular que limita ambas regiones. En efecto: En el intervalo $(t,\ t+\Delta t)$ entra al centro de la placa y se distribuye en toda su superficie una cantidad de carga:

$$\Delta q = I\,\Delta t$$

La cantidad de carga que pasa en este intervalo de tiempo por una circunferencia de radio r es:

$$I\,\Delta t\left[\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}\right]$$

La corriente a través de la circunferencia de radio r es entonces:

$$I\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

La densidad de corriente superficial es por lo tanto

$$\vec{K} = \frac{I}{2\pi r}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]\hat{e}_\rho$$

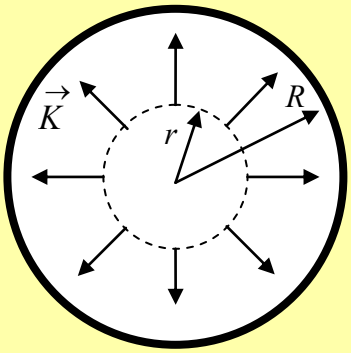


Fig (3) Vista frontal de una placa de un capacitor de placas paralelas. La carga eléctrica entra por el centro y se distribuye uniformemente en toda la superficie de la placa.

Ejemplo 2: Un capacitor consiste de dos placas circulares paralelas de área S con vacío entre ellas. Está conectado a una batería de fem ξ . Las placas oscilan lentamente de modo que permanecen paralelas pero la separación entre ellas varía como $d = d_0 + d_1 \operatorname{Sen} \omega t$. Encontrar el campo H entre las placas producido por la corriente de desplazamiento.

Solución:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \frac{\xi}{d_0 + d_1 \operatorname{Sen} \omega t} \hat{e}_z$$

Cálculo de la corriente de desplazamiento $\vec{J}_d$:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\xi \omega d_1 \operatorname{Cos} \omega t}{(d_0 + d_1 \operatorname{Sen} \omega t)^2} \hat{e}_z$$

Cálculo del campo $\vec{H}$:

$$2\pi r H = J_d \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{J_d r}{2} \hat{e}_\phi$$

$$\boxed{\vec{H} = -\varepsilon_0 \frac{\xi \omega \ d_1 \operatorname{Cos} \omega t}{(d_0 + d_1 \operatorname{Sen} \omega t)^2} \frac{r}{2} \hat{e}_\phi}$$

12.4 ECUACIONES DE MAXWELL

Es común resumir la teoría electromagnética en las cuatro siguientes ecuaciones llamadas las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho \tag{4a}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \tag{4b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4d}$$

En realidad estas son respectivamente la forma diferencial de la ley de Gauss para el campo eléctrico, la ley de Gauss para el campo magnético, la ley de Faraday y la ley Ampere Maxwell.

La importancia de estas ecuaciones se puede apreciar desde dos puntos de vista: En primer lugar permiten resumir la teoría electromagnética diciendo que las fuerzas sobre cargas eléctricas están dadas por:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{5}$$

donde las fuentes de los campos E y B están dadas por las 4 ecuaciones arriba mencionadas.

COMENTARIO: Para este propósito hubiera sido más preciso escribir las 4 ecuaciones en la forma:

$$\vec{\nabla} \bullet \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_{\text{total}} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{total}}$$

donde $\rho_{\text{total}} = \rho + \rho_P$ y $\vec{J}_{\text{total}}$ es la suma de corrientes de magnetización, corrientes de transporte y corrientes de desplazamiento. De acuerdo con el

teorema de Helmholtz, las ecuaciones anteriores son equivalentes a las ecuaciones en forma integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho_{\text{total}}(\vec{r}')\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' + \frac{1}{4\pi}\iiint \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}')\right]\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{J}_{\text{total}}(\vec{r}')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'.$$

Recordemos que estas ecuaciones son exactas pero no son prácticas**.**

Al escribir las 4 ecuaciones de Maxwell en la forma (4) se está haciendo énfasis en la necesidad de usar los campos auxiliares **D** y **H** para resolver problemas que involucran dos o más medios.

En segundo lugar, las 4 ecuaciones escritas en la forma (4) son el punto de partida para continuar con el estudio de la teoría electromagnética, dedicándonos ahora a los fenómenos de propagación y radiación.

En medios L.I.H. las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en términos de solamente dos campos, puede elegirse por ejemplo **E** y **B** ó **E** y **H**. Adoptamos la segunda opción:

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (6a)$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{H} = 0 \qquad (6b)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (6c)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (6d)$$

A continuación usaremos esta forma de las ecuaciones de Maxwell para derivar el teorema de Poynting y la ecuación de onda.

12.5 TEOREMA DE POYNTING

Usando las ecuaciones de Maxwell se puede obtener una relación muy útil entre el flujo de energía transportada por los campos electromagnéticos, la variación de densidad de energía y la energía disipada en los medios.

Para obtener esta relación comenzamos multiplicando escalarmente las ecs (6c) y (6d) respectivamente por los campos **H** y (-**E**):

$$\vec{H} \bullet \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right]$$

$$-\vec{E} \bullet \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$\vec{H} \bullet \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\vec{E} \bullet \vec{J} - \varepsilon \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Usando la identidad vectorial $\vec{\nabla} \bullet \left[\vec{F} \times \vec{G} \right] = \vec{G} \bullet \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \bullet \vec{\nabla} \times \vec{G}$ se tiene:

$$\vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \bullet \vec{J} - \varepsilon \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Por otro lado, considerando:

$$\varepsilon \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon E^2}{\partial t} = \frac{\partial u_e}{\partial t}$$

$$\mu \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu H^2}{\partial t} = \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

se obtiene:

$$\boxed{\vec{\nabla} \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \bullet \vec{J} - \frac{\partial u_{em}}{\partial t}} \qquad (7)$$

($u_{em} = u_e + u_m$ densidad de energía electromagnética).

Definición Al producto vectorial de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ lo llamamos vector de Poynting:

$$\vec{\pi} = (\vec{E} \times \vec{H}) \tag{8}$$

Reemplazando esta definición en la ec. (7) obtenemos la forma usual del teorema de Poynting

$$-\vec{\nabla} \bullet \vec{\pi} = \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{J} \bullet \vec{E} \tag{9}$$

Integrando sobre un determinado volumen de interés:

$$-\iiint_V \vec{\nabla} \bullet \vec{\pi}\, dV = \frac{\partial}{\partial t} U_{em} + \iiint_V \vec{J} \bullet \vec{E}\, dV$$

Y aplicando el teorema de la divergencia al primer miembro:

$$-\oiint_S \vec{\pi} \bullet d\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} U_{em} + \iiint_V (\vec{J} \bullet \vec{E})\, dV \tag{10}$$

Significado físico del teorema de Poynting:

Nótese que las cantidades físicas del segundo miembro de la ec.(10) tienen unidades de energía por unidad de tiempo, es decir, potencia. Representan respectivamente la rapidez con que aumenta la energía almacenada dentro de un volumen V y la rapidez con que se disipa energía por efecto Joule. El flujo del vector de Poynting con signo negativo se interpreta entonces como la rapidez con que entra energía electromagnética al volumen V a través de la superficie S que lo encierra. El significado del teorema se resume de la siguiente manera.

En cada intervalo de tiempo $(t, t+dt)$, la energía que entra a un volumen encerrado por una superficie S es igual al cambio en la energía almacenada más la energía perdida por efecto Joule.

El **vector de Poynting** viene a ser entonces **potencia por unidad de área**.

Ejemplo 3

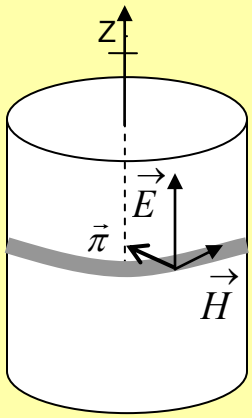
Por un cable en forma de cilindro circular recto de radio a y conductividad g, muy largo, circula una corriente constante I distribuida uniformemente en toda la sección transversal del alambre. Encuentre:

a) el vector de Poynting $\vec{\pi}$ en la superficie del cilindro.

b) el flujo del vector de Poynting a través del área de una sección de longitud L del cilindro.

c) Explique cómo se verifica el teorema de Poynting en este caso.

Solución:



$$\vec{E} = \frac{I}{g\,\pi a^2}\,\hat{e}_z \qquad \vec{H} = \frac{I}{2\,\pi a}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{\pi} = \vec{E} \times \vec{H} = -\frac{I^2}{2g\pi^2 a^3}\,\hat{e}_\rho$$

$$-\oiint \vec{\pi} \bullet d\vec{a} = \frac{I^2}{g\,\pi a^2} L \quad , \quad \iiint (\vec{J} \bullet \vec{E})\, dV = I^2 R = \frac{I^2}{g\,\pi a^2} L$$

Conclusión: En este problema donde los campos en el interior del cilindro se mantienen constantes, no hay variación en la energía almacenada por los campos electromagnéticos. La energía que entra, a través de la superficie, como flujo del vector de Poynting es igual a la energía que se disipa por efecto Joule,

12.6 LA ECUACIÓN DE ONDA en medios sin carga eléctrica

En medios donde no hay carga eléctrica $\rho = 0$ las ecuaciones de Maxwell en medios L.I.H. se escriben:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \tag{6a}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \tag{6b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{6c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6d}$$

En 1865 J.C. Maxwell publicó un trabajo en el cual se deduce que los campos electromagnéticos satisfacen una ecuación de onda. Las ondas electromagnéticas se produjeron físicamente por primera vez en 1887 por H. Hertz.

En el lenguaje moderno del análisis vectorial la deducción de la ecuación de onda para los campos electromagnéticos se obtiene de acuerdo al siguiente procedimiento.

Tomando el rotacional a ambos miembros de la ecuación (6c) obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

y combinando con ec (6d) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

El uso de la identidad vectorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ y la ec (6a) nos permite obtener:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \tag{11a}$$

Esta es la ecuación de onda para el campo eléctrico.

La ecuación de onda para el campo intensidad magnética se obtiene de manera similar, comenzando por tomar el rotacional a ambos miembros de la ecuación (6d) y combinando el resultado con la ecuación (6c)

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} \right] = \vec{\nabla} \times \left| \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu g \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (11b)$$

La ecuación de onda para **H** es exactamente la misma que para **E.**

Un caso particular importante es el caso en que el medio de propagación es el vacío, entonces $g = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (12)$$

y si la disposición geométrica es tal que los campos dependen sólo de una variable espacial por ejemplo *z*, tendremos:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (13b)$$

Tanto las ecuaciones vectoriales en la forma (12) ó (13) pueden escribirse como un sistema de seis ecuaciones escalares de la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (14)$$

donde ψ representa a una de las componentes del campo E o del campo H.

12.7 SOLUCIONES ARMÓNICAS Y NOTACIÓN FASORIAL

Es fácil verificar que las funciones armónicas:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{Cos}(\omega t - kz + \theta) \quad \text{ó} \quad \psi = \psi_0 \operatorname{Sen}(\omega t - kz + \theta) \tag{15}$$

son soluciones de la ecuación (14). Y usando la idea de series de Fourier estas soluciones son la base para todas las soluciones periódicas de dicha ecuación.

Ambas soluciones (15) pueden obtenerse como la parte real o parte imaginaria de las soluciones complejas de la forma:

$$\psi_C = \psi_0 e^{i(\omega t - k z + \theta)} \tag{16}$$

Si factorizamos el término dependiente del tiempo $e^{i\omega t}$ podemos escribir:

$$\psi_C = \psi_S e^{i\omega t}$$

donde:

$$\boxed{\psi_S = \psi_0 e^{i\theta} e^{-ikz}} \tag{17}$$

es conocida como la representación fasorial o el fasor de la onda.

Similarmente se mostrará en el próximo capítulo que las soluciones reales a las ec (11) se pueden escribir de la forma:

$$\psi = \psi_0 e^{-\alpha z} \operatorname{Cos}(\omega t - kz + \theta) \tag{18a}$$

$$\psi = \psi_0 e^{-\alpha z} \operatorname{Sen}(\omega t - k z + \theta) \tag{18b}$$

que se obtienen como parte real (o imaginaria) de la solución compleja

$$\psi_C = \psi_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta)} \tag{19}$$

El fasor o representación fasorial para este tipo de ondas será de la forma:

$$\boxed{\psi_S = \psi_0 e^{-\alpha z} e^{i\theta} e^{-i\beta z}} \tag{20}$$

Ejemplo 4. Escriba la expresión fasorial de la función:

$$\psi(t) = 14\,\mathrm{Cos}\,(\omega t - 30^{\mathrm{o}})$$

Solución:

$$\psi_C(t) = 14e^{i(\omega t - 30^\circ)} = e^{i\omega t}\left(14\ \ e^{-i\ 30^\circ}\right) \Rightarrow \boxed{\psi_S = 14e^{-i\ 30^\circ} = 14e^{-i\pi/6}}$$

Ejemplo 5. El campo eléctrico de una onda electromagnética está dado por la función dependiente de la posición y el tiempo:

$$\vec{E}(z,t) = 10\,\hat{e}_y\,\mathrm{Cos}(10^9\,t - 10z)$$

¿Cuál es la representación fasorial para dicha onda?

Solución:

La solución compleja cuya parte real nos da la mencionada onda es:

$$\vec{E}_C(z,t) = 10\,\hat{e}_y\,e^{i\,(10^9\,t\,-10z)} = e^{i(10^9\,t)}\ \hat{e}_y 10e^{-i(10z)}$$

El fasor que representa a esta onda es entonces:

$$\vec{E}_S(z) = \hat{e}_y 10e^{-i\,(10z)}$$

Ejemplo 6. El campo intensidad magnética de una onda se expresa por el fasor:

$$\vec{H}_S(z) = -0{,}04\,\hat{e}_x\,e^{-5z}e^{-i(10z)}$$

Si la frecuencia es 10^9 rad/s, escriba la expresión dependiente del tiempo para dicho campo magnético.

Solución:

La función compleja que describe a esta onda es:

$$\vec{H}_C(z,t) = 0{,}04\,\hat{e}_x\,e^{-5z}\,e^{i\,\pi}\,e^{-i(10z)}e^{i(10^9 t)} = 0{,}04\,\hat{e}_x\,e^{-5z}e^{i(10^9 t\,-10z+\pi)}$$

La parte real será:

$$\vec{H}(z,t) = 0{,}04\,\hat{e}_x\,e^{-5z}\mathrm{Cos}\,(10^9\,t - 10z + \pi)$$

12.8 CONDICIONES DE FRONTERA PARA CAMPOS ARMÓNICOS

Las condiciones de frontera:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{21a}$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{21b}$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \tag{21c}$$

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{K} \times \hat{n} \tag{21d}$$

fueron deducidas en los capítulos (5) y (9) a partir de las ecuaciones de la electrostática y de la magnetostática :

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho \tag{22a}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \tag{22b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{22c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \tag{22d}$$

Aunque las ecuaciones (22c) y (22d) han sido modificadas por la ley de Faraday y por la ley Ampere Maxwell, puede demostrarse que las ecuaciones (21c) y (21d) siguen siendo válidas para los casos de campos dependientes del tiempo.

Conviene agregar además que la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} = -\partial\rho / \partial t \tag{22e}$$

nos permite establecer la relación en cada interfase entre dos medios:

$$J_{2n} - J_{1n} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{21e}$$

Para campos armónicos y medios L.I.H. las ecuaciones (21a) y (21e) se escribirán:

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_0 \, e^{i\omega t}$$

$$g_2 E_{2n} - g_1 E_{1n} = i\omega\sigma_0 e^{i\omega t}$$

y se obtiene la relación general:

$$\left(\varepsilon_1 - i\frac{g_1}{\omega}\right) E_{1n} = \left(\varepsilon_2 - i\frac{g_2}{\omega}\right) E_{2n} \qquad (22)$$

CASO PARTICULAR: CONDUCTOR PERFECTO

Es particularmente importante estudiar cómo son las condiciones de frontera cuando uno de los dos medios es conductor perfecto ($g \to \infty$). Por ejemplo si el medio 1 es conductor perfecto y reiteramos que estamos hablando de campos que varían armónica y monocromáticamente con el tiempo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = (g_1 + i\omega\varepsilon_1)\vec{E}_1$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{H}}{(g_1 + i\omega\varepsilon_1)}$$

Entonces: $g_1 \to \infty$ nos conduce a

$$\vec{E}_1 = 0\,, \qquad \text{es decir,} \qquad E_{1t} = 0 \quad ; \quad E_{1n} = 0$$

Las condiciones de frontera (21c) y (21a) nos permiten establecer que:

$$E_{2t} = 0 \qquad ; \qquad E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Así mismo, aplicando la ley de Faraday a campos armónicos monocromáticos en el medio 1:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\mu \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -i\omega\mu \vec{H}_1$$

$$\vec{H}_1 = i\frac{\vec{\nabla}\times\vec{E}_1}{\omega\mu}$$

El campo magnético alterno es cero en el interior de un medio conductor perfecto.

$$\vec{H}_1 = 0, \quad \text{es decir}, \quad \vec{H}_{1t} = 0 \quad ; \quad \vec{H}_{1n} = 0$$

Entonces, las condiciones de frontera (21b) y (21d)

$$B_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{H}_{2t} = \vec{K}\times\hat{n}$$

Conclusión: Si una onda electromagnética se propaga e incide en un medio conductor perfecto se inducirán en la superficie de interfase distribuciones superficiales de carga σ que lo blindan de la penetración del campo eléctrico alterno y también se inducirán corrientes superficiales $\vec{K}$ que lo blindan de la penetración del campo magnético alterno.

$$E_{2t} = 0$$
$$E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$
$$B_{2n} = 0$$
$$\vec{H}_{2t} = \vec{K}\times\hat{n}$$

$$g_1 \to \infty$$
$$\vec{E}_1 = \vec{0}$$
$$\vec{H}_1 = \vec{0}$$

COMENTARIO: Este blindaje se parece al blindaje electrostático de un conductor a los campos electrostáticos y de un superconductor a los campos magnéticos estáticos pero no es exactamente lo mismo. En efecto, es importante diferenciar entre un superconductor (resistencia eléctrica cero y permeabilidad magnética cero) y un conductor perfecto (resistencia aproximadamente cero). En el interior de un conductor perfecto sí puede haber campo magnético estático. Otra diferencia es que la superconductividad es un fenómeno que sucede físicamente a bajas temperaturas, mientras que el concepto de conductor perfecto es una aproximación válida a cualquier temperatura cuando $g >>> \omega\varepsilon$.

PROBLEMAS

1. En el proceso de carga de un capacitor de placas en un circuito RC, se sabe que:

$$Q = C V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Si las placas son circulares de radio a , el medio entre las placas es aire y la distancia entre ellas es d, dé una expresión para:

a) el campo eléctrico entre las placas

b) la energía eléctrica almacenada en el capacitor en función del tiempo

c) la derivada con respecto al tiempo de la energía eléctrica

d) el vector de Poynting en la superficie del cilindro r = a.

e) el flujo del vector de Poynting a través de la superficie lateral del capacitor.

2. Un capacitor de placas paralelas circulares, tiene entre las placas un dieléctrico l.i.h. de permitividad ε. El dieléctrico es imperfecto y tiene una conductividad g. La capacitancia del capacitor es C. El capacitor se carga a una diferencia de potencial V_0 y se aísla. (a) Halle la carga del capacitor en función del tiempo. (b) Halle la corriente de desplazamiento en el dieléctrico. (c) Halle el campo magnético en el interior del dieléctrico.

3. Demuestre que cualquier función de la forma:

$$\psi(z - ct) \qquad \text{ó} \qquad \psi(z + ct)$$

satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

donde $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

4. Un capacitor formado por superficies cilíndricas conductoras coaxiales tiene los parámetros a = 5 mm, b = 30 mm, $\ell = 20\ \text{cm}$, $\varepsilon_r = 8$ y $g = 10^{-6}\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$. Si la densidad de corriente de conducción en el capacitor es:

$$\vec{J} = \frac{2}{\rho}\,\text{Sen}\,10^6 t\ \text{A/m}^2,$$

encuentre:

a) La corriente total de conducción a través del capacitor

b) el valor instantáneo máximo de la densidad de corriente de desplazamiento

c) La corriente de desplazamiento total I_d

d) La razón I_d / I

5. Se sabe que en la región $x < a$, entre dos placas paralelas infinitas, existen campos electromagnéticos descritos por las ecuaciones:

$$E_y = -H_0\,\mu_0\,\omega\left(\frac{a}{\pi}\right)\,\text{Sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\text{Sen}(kz-\omega t)$$

$$H_x = H_0\,k\left(\frac{a}{\pi}\right)\text{Sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\text{Sen}(kz-\omega t)$$

$$H_z = H_0\,\text{Cos}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\text{Cos}(kz-\omega t)$$

donde H_0, k, ω y a son constantes que satisfacen $\mu_0\varepsilon_0\omega^2 = k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$.

a) Verificar por sustitución directa que estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell

b) Encontrar la corriente de desplazamiento

c) Encontrar el vector de Poynting

d) Si en $x < 0$ hay un conductor perfecto, encontrar las densidades de carga σ y de corriente superficial $\vec{K}$ en la superficie $x = 0$.

6. Obtención de la ecuación de onda para los potenciales vectorial y escalar.

a) Usando la ley de Faraday obtenga la siguiente expresión para el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

b) A partir de la ley Ampere Maxwell y el resultado anterior obtenga la expresión:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \vec{A}) + \varepsilon\,\mu \vec{\nabla}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mu \vec{J}$$

c) Verifique que imponiendo la ecuación de Lorentz a los potenciales:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

se obtienen las ecuaciones de onda para los potenciales vectorial y escalar:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

$$\nabla^2 U - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

CAPÍTULO 13

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS

13.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo comenzamos mostrando las diversas formas de describir las ondas electromagnéticas planas. Enseguida deduciremos las relaciones entre los campos eléctrico y magnético de las ondas que se propagan en medios dieléctricos así como en medios conductores. También introducimos el concepto de polarización de las ondas y establecemos las relaciones entre el vector de Poynting y la densidad de energía electromagnética de las ondas.

13.2 ONDAS PLANAS EN DIELÉCTRICOS PERFECTOS ($g = 0$)

Si la conductividad eléctrica de un medio es g = 0 y la densidad de carga es $\rho = 0$, las ecuaciones de Maxwell se escribirán:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \qquad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \qquad (1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (1d)$$

Y de estas se deduce la ecuación de onda para el campo eléctrico y el campo magnético, en buen acuerdo con las ecs. (4) del capítulo anterior

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2b)$$

Caso particular en que los campos dependen de una sola variable espacial.

Así como en electrostática se comenzó resolviendo problemas con la ecuación de Laplace para casos en que los campos dependen de una sola variable, ahora podemos comenzar a estudiar soluciones de la ecuación de onda suponiendo que los campos dependen de una variable espacial, digamos z. En este caso las ecs (2) se pueden volver a escribir en la forma:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3c)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3d)$$

Una de las seis componentes

Estas ecuaciones diferenciales vectoriales son en realidad un conjunto de seis ecuaciones escalares de la forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (4)$$

donde Ψ representa cada una de las tres componentes del campo eléctrico y las tres del campo magnético **H**. Las soluciones a (4) son de la forma:

$$\Psi(z,t) = f(z - \mathrm{v}t) \quad \text{ó} \quad \Psi(z,t) = f(z + \mathrm{v}t) \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) es inmediato que la velocidad de propagación es:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \qquad (6)$$

Se define **índice de refracción** (n) como:

$$\mathrm{v} = \frac{c}{n} \qquad (7)$$

De las ecs. (6) y (7) es inmediato que el índice de refracción de un medio es

$$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \tag{8}$$

Soluciones armónicas

Un tipo de soluciones muy importantes en física son las soluciones armónicas

$$\Psi(z,t) = \Psi_0 \operatorname{Cos}(\omega t - kz)$$

$$\Psi(z,t) = \Psi_0 \operatorname{Sen}(\omega t - kz)$$

Es inmediato que estas son soluciones de la forma (5) con:

$$\mathrm{v} = \frac{\omega}{k} \tag{9}$$

ω es la frecuencia angular y más tarde será evidente que a la constante k la podemos llamar módulo del vector de onda.

La periodicidad de las ondas es evidente a partir de la constatación que:

$$\Psi(z,t) = \Psi\left(z, t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$\Psi(z,t) = \Psi\left(z + \frac{2\pi}{k}, t\right)$$

Las cantidades:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

son respectivamente los períodos temporal y espacial. A la cantidad λ se le llama longitud de onda. También se usa el concepto de frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Soluciones armónicas complejas

En lugar de escribir las soluciones armónicas en términos de seno y coseno, es práctica común en la teoría electromagnética usar las soluciones armónicas complejas

$$\Psi(z,t) = \Psi_0 e^{i(\omega t - k z)} \tag{10}$$

ó $$\Psi(z,t) = (\Psi'_0 + i\Psi''_0)\, e^{i(\omega t - k z)} = \left|\Psi_0\right| e^{i\phi}\, e^{i(\omega t - k z)} \tag{10a}$$

y volver a la realidad de las cantidades físicas tomando la parte real (o por convención explícita la parte imaginaria) de las funciones complejas

$$\Re e\big(\Psi(z,t)\big) = \Psi'_0\ \mathrm{Cos}(\omega t - kz) - \Psi''_0\ \mathrm{Sen}(\omega t - kz) \tag{11a}$$

ó

$$\Re e\big(\Psi(z,t)\big) = \left|\Psi_0\right|\ \mathrm{Cos}\big(\omega t - kz + \phi\big) \tag{11b}$$

Las 6 componentes propagándose en la dirección del eje Z

Como se ha dicho anteriormente con seis soluciones de la forma (10) podemos construir las soluciones armónicas a las ecuaciones (3)

$$\vec{E}_C = \left(E_{0Cx}\,\hat{e}_x + E_{0Cy}\,\hat{e}_y + E_{0Cz}\,\hat{e}_z\right) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{H}_C = \left(H_{0Cx}\,\hat{e}_x + H_{0Cy}\,\hat{e}_y + H_{0Cz}\,\hat{e}_z\right) e^{i(\omega t - k z)}$$

que se condensan en la forma:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{0C}\, e^{i(\omega t - k z)} \qquad \vec{H}_C = \vec{H}_{0C}\, e^{i(\omega t - k z)} \tag{12}$$

y que pueden también escribirse en la forma:

$$\vec{E}_C = \hat{e}\left|\vec{E}_{0C}\right| e^{i\phi}\, e^{i(\omega t - k z)} \qquad \vec{H}_C = \hat{h}\left|\vec{H}_{0C}\right| e^{i\phi}\, e^{i(\omega t - k z)}$$

donde $\hat{e}$ y $\hat{h}$ son vectores unitarios en la dirección de **E** y **H** respectivamente.

Las respectivas partes reales son:

$$\vec{E} = \hat{e} \left| \vec{E_0} \right| \mathrm{Cos}(\omega t - k z + \phi)$$

$$\vec{H} = \hat{h} \left| \vec{H_0} \right| \mathrm{Cos}(\omega t - k z + \phi)$$

Las seis componentes propagándose en una dirección cualquiera

Podemos cambiar ligeramente la forma de las ecuaciones (12)

$$\vec{E_C} = \vec{E}_{0C} e^{i(\omega t - k \hat{e}_z \bullet \vec{r})}$$

$$\vec{H_C} = \vec{H}_{0C} e^{i(\omega t - k \hat{e}_z \bullet \vec{r})}$$

que se puede generalizar a cualquier dirección de propagación $\hat{e}_p$

$$\vec{E_C} = \vec{E}_{0C} e^{i(\omega t - k \hat{e}_p \bullet \vec{r})} \qquad \vec{H_C} = \vec{H}_{0C} e^{i(\omega t - k \hat{e}_p \bullet \vec{r})}$$

y que vamos a usar frecuentemente en la forma:

$$\vec{E_C} = \vec{E}_{0C} e^{i(\omega t - \vec{k} \bullet \vec{r})} \tag{13a}$$

$$\vec{H_C} = \vec{H}_{0C} e^{i(\omega t - \vec{k} \bullet \vec{r})} \tag{13b}$$

$\vec{k} = k \hat{e}_p$ es el vector de onda, y $\hat{e}_p$ vector unitario en la dirección de propagación.

RELACIÓN DE DISPERSIÓN:

Reemplazando las ecuaciones (13) en las ecs. (2) se obtiene:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \tag{14a}$$

conocida como relación de dispersión y que también se puede escribir en la forma..

$$k = \frac{\omega}{\mathrm{v}} = \frac{\omega}{c} n \tag{14b}$$

RELACIONES ENTRE LOS CAMPOS DE LAS ONDAS PLANAS

Además de satisfacer la ecuación de onda, los campos de las ecs. (13) deben satisfacer también las ecuaciones de Maxwell. Esta imposición resulta en tres relaciones características entre los campos **E** y **H** de una onda electromagnética plana propagándose en un medio aislante.

Aplicando el operador nabla a las ondas planas (ecs. (13)) se obtendrá:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E_C} = -i\vec{k} \bullet \vec{E_C} \tag{15a}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H_C} = -i\vec{k} \bullet \vec{H_C} \tag{15b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E_C} = -i\vec{k} \times \vec{E_C} \tag{15c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H_C} = -i\vec{k} \times \vec{H_C}\,. \tag{15d}$$

Considerando además que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E_C} = i\omega\vec{E_C} \tag{15e}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H_C} = i\omega\vec{H_C} \tag{15f}$$

Reemplazando las ecuaciones (15) en las ecuaciones de Maxwell (ecs. (1)):

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \bullet \vec{E} = 0 \tag{16a}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \bullet \vec{H} = 0 \tag{16b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{k}}{\mu\omega} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu \mathrm{v}}\hat{e}_p \times \vec{E} \tag{16c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\vec{k}}{\varepsilon\,\omega} \times \vec{H} = \mathrm{v}\mu\vec{H} \times \hat{e}_p \tag{16d}$$

Es más frecuente escribir las relaciones entre los campos **E** y **H** (ecs (16c y 16d)) como:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{e}_p \times \vec{E} \qquad \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\vec{H} \times \hat{e}_p$$

Definimos **Impedancia intrínseca del medio:**

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{17}$$

(En particular, la impedancia intrínseca del vacío es $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega = 377\Omega$)

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{e}_p \times \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{E} = \eta\,\vec{H} \times \hat{e}_p} \tag{18}$$

Resumen de resultados para ondas planas en dieléctricos perfectos:

De las ecs. (18), podemos concluir que cuando una onda electromagnética plana se propaga en medios dieléctricos perfectos:

(i) Los campos **E** y **H** se propagan en fase

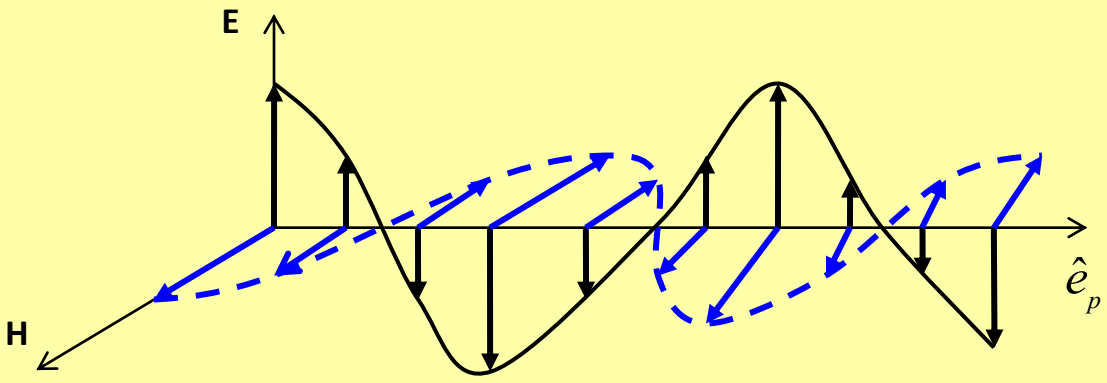
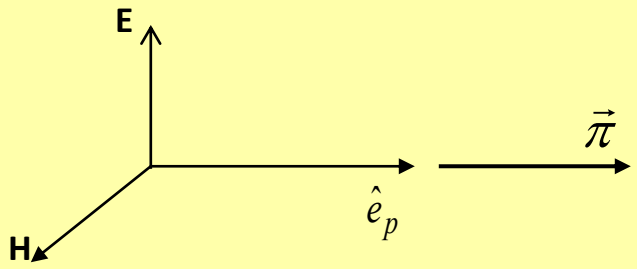


Fig. 1 Las OEM en aislantes perfectos son transversales y se propagan en fase

(ii) Los campos **E** y **H** son perpendiculares entre sí y son perpendiculares a la dirección de propagación. Por esto se dice que las OEM son ondas transversales. En el orden **E**, **H** y $\hat{e}_p$ forman una terna dextrogira.



(iii) La amplitud de los campos **E** (V/m) y **H** (A/m) es constante y la relación entre ellos es la impedancia del medio, parecida a la ley de Ohm.

Ejemplo 1: Si el campo eléctrico de una onda electromagnética en un medio dieléctrico sin pérdidas con permitividad eléctrica relativa 9,0 y permeabilidad magnética relativa 1,0 es:

$$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_y 5\,\mathrm{Cos}(10^9 t - k\,z)\ \mathrm{V/m}.$$

Calcule:

a) el módulo del vector de onda, k , la longitud de onda, el período, la velocidad de fase, el índice de refracción del medio.

b) el campo intensidad magnética **H**

Solución:

a) $$k = \omega\sqrt{\varepsilon\,\mu} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{10^9}{c}\sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}$$

$$k = 10\ \mathrm{m}^{-1} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}628\ \mathrm{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}28\ \mathrm{ns} \qquad n = \sqrt{\varepsilon_r} = 3$$

$$\mathrm{v} = \frac{\omega}{k} = 10^8\ \mathrm{m/s} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{3}(377\ \Omega)$$

b) De las ecuaciones (18):

$$\vec{H}(z,t) = \frac{1}{\eta}\hat{e}_p \times \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{H}(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{e}_z \times \hat{e}_y \left\{5\,\mathrm{Cos}\,(10^9 t - 10z)\right\}$$

$$\boxed{\vec{H}(z,t) = -\hat{e}_x\, 0{,}04\,\mathrm{Cos}\,(10^9 t - 10z)\ \mathrm{A/m}}$$

Ejemplo 2: La expresión de la intensidad de campo magnético **H** de una onda plana que se propaga por el aire en la dirección +y está dada por:

$$\vec{H}(y,t) = \hat{e}_z 4\times 10^{-6}\mathrm{Cos}\,(0{,}25\times 10^6 \pi t - k y + \pi/4)\ \mathrm{A/m}.$$

a) Determine k

b) Escriba la expresión para $\vec{E}(y,t)$

Solución:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{0{,}25\,\pi\times 10^6}{3\times 10^8} = 0{,}26\times 10^{-2}\,\mathrm{m}^{-1}$$

De ecuaciones (18):

$$\vec{E} = \eta\,\vec{H}\times\hat{e}_p$$

$$\vec{E}(y,t) = (377)4\times 10^{-6}\mathrm{Cos}(0{,}25\times 10^6\pi t - 0{,}26\times 10^{-2} y + \pi/4)\,\hat{e}_z \times \hat{e}_y$$

$$\vec{E}(y,t) = -1{,}5\,\mathrm{Cos}(0{,}25\times 10^6\pi t - 0{,}26\times 10^{-2} y + \pi/4)\ \mathrm{mV/m}\ \hat{e}_x.$$

13.3 ONDAS PLANAS EN MEDIOS DISIPATIVOS ($g \neq 0$)

Para campos que dependen armónicamente del tiempo, en la cuarta ecuación de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = g\vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

podemos usar la relación:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \rightarrow \vec{E} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

para obtener:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\varepsilon - i\frac{g}{\omega}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y definiendo: **Permitividad eléctrica compleja del medio**:

$$\varepsilon_C = \left(\varepsilon - i\frac{g}{\omega} \right) \tag{19}$$

Las ecuaciones de Maxwell en medios disipativos se escribirán:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{20a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{20b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{20c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon_C \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{20d}$$

La ecuación de onda se deduce tomando el rotacional a ambos miembros de las ecs (20c) y (20d):

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon_C \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (21a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon_C \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (21b)$$

Estas son en realidad sólo una forma alternativa de escribir la ecuación general de onda, ecs. (11) del capítulo anterior. La ventaja de las ecuaciones (21) es que permiten el análisis de las ondas en medios conductores en forma análoga a las ondas en aislantes perfectos. Así:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_C \bullet \vec{r})} \qquad \vec{H}_C = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_C \bullet \vec{r})} \qquad (22)$$

La relación de dispersión es ahora:

$\vec{k}_C = k_C \hat{e}_p = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_C}\, \hat{e}_p$, k_C es un número complejo (23)

Es conveniente escribir las ecuaciones (22) en la forma:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-i k_C \hat{e}_p \bullet \vec{r}} \qquad (24a)$$

$$\vec{H}_C = \vec{H}_0 e^{i\omega t} e^{-i k_C \hat{e}_p \bullet \vec{r}} \qquad (24b)$$

y definir los parámetros α y β de la siguiente manera:

$$i k_C = \alpha + i\beta \qquad (25)$$

de modo que la expresión general para una onda en medios disipativos será:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_0 e^{-\alpha \hat{e}_p \bullet \vec{r}} e^{i\omega t} \; e^{-i\beta \hat{e}_p \bullet \vec{r}} \qquad (26a)$$

$$\vec{H}_C = \vec{H}_0 e^{-\alpha \hat{e}_p \bullet \vec{r}} e^{i\omega t} \; e^{-i\beta \hat{e}_p \bullet \vec{r}} \qquad (26b)$$

Los parámetros α y β se llaman respectivamente parámetro de atenuación y parámetro de fase.

PARÁMETROS DE LA ONDA VS PARÁMETROS DEL MEDIO

Estableceremos las relaciones entre los parámetros de la onda α y β con la frecuencia de la onda y los parámetros del medio ε, μ y g.

Combinando las ecuaciones (25), (23) y (19)

$$i\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - i\frac{g}{\omega}\right)} = \alpha + i\beta \tag{27}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

$$2\alpha\beta = \omega\mu g$$

y despejando, tenemos el coeficiente de atenuación y el coeficiente de fase en términos de la frecuencia de la onda y de las propiedades de los medios.

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \tag{28a}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} \tag{28b}$$

Si el vector de propagación está en la dirección del eje Z positivo, las ecuaciones (26) se escribirán:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{29a}$$

$$\vec{H}_C = \vec{H}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{29b}$$

que nos permite establecer que en los medios conductores las ondas se propagan de la misma forma que en los dieléctricos perfectos pero con una amplitud que se atenúa exponencialmente al avanzar en la dirección de propagación.

La longitud de onda y la velocidad de fase se obtienen de la misma manera que en las ondas en dieléctricos perfectos

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{30a}$$

$$\mathrm{v} = \frac{\omega}{\beta} \tag{30b}$$

Un parámetro importante cuando se habla de ondas en medios conductores o disipativos es la profundidad de penetración definida como

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \tag{30c}$$

y cuyo significado físico es la distancia a la cual las amplitudes decrecen por factor e^{-1} = 0,37.

ÍNDICE DE REFRACCIÓN COMPLEJO:

Es frecuente atribuir la atenuación de las ondas que se propagan en conductores al carácter complejo del índice de refracción. La expresión:

$$k = \frac{\omega}{\mathrm{v}} = \frac{\omega}{c}\, n$$

puede generalizarse a

$$k_C = \frac{\omega}{c}\, \tilde{n}$$

y combinando con la ecuaciones (25) y (23) obtenemos:

$$\tilde{n} = \frac{c}{\omega}(\beta - i\alpha) \qquad \text{ó} \qquad \tilde{n} = c\sqrt{\mu\,\varepsilon_C} \tag{31}$$

RELACIONES ENTRE LOS CAMPOS PARA OEM EN MEDIOS DISIPATIVOS

Reemplazando las ecuaciones 24 en las ecuaciones de Maxwell (ecs. 20) se tiene:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_C \bullet \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_p \perp \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_C \bullet \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_p \perp \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{k}_C}{\mu\, \omega} \times \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_C}{\mu}}\, \hat{e}_p \times \vec{E}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\varepsilon_C \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{H} \times \frac{\vec{k}_C}{\varepsilon_C\, \omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_C}}\, \vec{H} \times \hat{e}_p}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\eta_C} \hat{e}_p \times \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{E} = \eta_C\, \vec{H} \times \hat{e}_p} \qquad (32)$$

Impedancia intrínseca compleja del medio:

$$\eta_C = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\varepsilon - i\frac{g}{\omega}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{\varepsilon}}{\left(1 - i\frac{g}{\omega\ \varepsilon}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{\varepsilon}}{\left(1 + \left[\frac{g}{\omega\ \varepsilon}\right]^2\right)^{1/2}}}\, e^{-i\varphi}$$

$$\eta_C = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}} e^{\,i\varphi/2} \;; \quad \varphi = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right) \qquad (33)$$

Tangente de pérdidas

A la cantidad $\frac{g}{\omega\varepsilon}$ se le llama tangente de pérdidas.

APROXIMACIONES VÁLIDAS PARA BUENOS CONDUCTORES:

$$\left(\frac{g}{\omega \varepsilon} >> 1 \right)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu \omega g}{2}} \tag{34a}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu \omega g}{2}} \tag{34b}$$

$$\eta_C = \sqrt{\frac{\mu \omega}{g}} \, e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2g}} (1+i) \tag{34c}$$

APROXIMACIONES VÁLIDAS PARA AISLANTES CON PEQUEÑAS PÉRDIDAS

$$\left(\frac{g}{\omega \varepsilon} << 1 \right)$$

$$\alpha = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{35a}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \tag{35b}$$

$$\eta_C = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + i \frac{g}{2\omega\varepsilon} \right) \tag{35c}$$

Las relaciones de esta página entre α y β con los parámetros del medio ε , μ y g son aproximaciones útiles obtenidas a partir de las relaciones exactas (ecs. (28)). Los valores de η vienen de la ecuación (33). A partir de estas relaciones se puede obtener valores aproximados para la longitud de onda λ, la velocidad de fase v y la profundidad de penetración δ, aplicando las ecuaciones (30).

Resumen de resultados para ondas en medios disipativos

(i) Las ondas son transversales. Los vectores **E**, **H** y $\hat{e}_p$ forman una terna dextrogira.

(ii) Las amplitudes de los campos son atenuados por un factor $e^{-\alpha z}$

(iii) Hay un desfasaje entre **E** y **H** . El valor del desfasaje es:

$$\frac{\varphi}{2} = 0{,}5 \ \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)$$

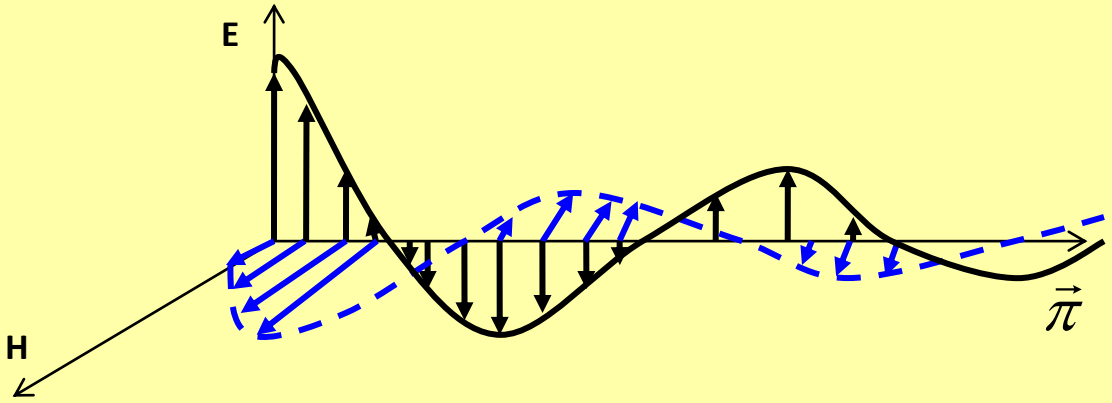


Fig. 2 Las OEM en conductores son transversales, amortiguadas y desfasadas

COMENTARIO:

La forma general para ondas que se propagan en un medio conductor o disipativo

$$\vec{E}_C = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \ e^{-(\alpha + i\beta)\hat{e}_p \bullet \vec{r}}$$

$$\vec{H}_C = \vec{H}_0 e^{i\omega t} \ e^{-(\alpha + i\beta)\hat{e}_p \bullet \vec{r}}$$

contiene a la forma general de las ondas en aislantes perfectos puesto que para g = 0 las ecuaciones (28) nos llevan a

$$\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \beta = k$$

También, para g = 0, la ec. (33) nos lleva a $\varphi = 0$.

Ejemplo 3: Para una onda electromagnética que se propaga en un medio con los parámetros $\varepsilon_r = 72,\ \mu_r = 1,\ g = 6,93\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$, determinar los valores de la tangente de pérdidas, la profundidad de penetración y la diferencia de fase entre el campo magnético y el campo eléctrico cuando la frecuencia de la onda es:

a) 1 kHz, b) 1,0 GHz y c) 200 GHz

Solución:

Para f = 1,0 kHz

$$\frac{g}{\omega\varepsilon} = 1,73 \times 10^6 >> 1 \quad \text{(buen conductor)}$$

De las ecuaciones (34a) y (30c) $\delta = 6,0\ m$

De las ecuaciones (32) y (34c) $\varphi/2 = \frac{\pi}{4}$ radianes

Para f = 1,0 GHz

$$\frac{g}{\omega\varepsilon} = 1,73 \approx 1 \quad \text{(conductor)}$$

De las ecuaciones (28a) y (30c) $\delta = 8,0$ mm

De las ecuaciones (32) y (33) $\varphi/2 = \frac{\pi}{6}$ radianes

Para f = 200 GHz

$$\frac{g}{\omega\varepsilon} = 0,0087 << 1 \quad \text{(aislante con pérdidas)}$$

De las ecuaciones (35a) y (30c) $\delta = 6,5$ mm

De las ecuaciones (32) y (35c) $\varphi/2 = 0,0043$ radianes

Ejemplo 4: Una onda electromagnética plana de 3 GHz, se propaga en la dirección $+x$ en un medio no magnético con permitividad dieléctrica relativa 2,5 y tangente de pérdidas 0,05.

a) Determine la distancia a la cual la amplitud se reducirá a la mitad

b) Determine la impedancia intrínseca, la longitud de onda y la velocidad de fase.

c) Suponiendo que $\vec{E}(x,t) = \hat{e}_y 50\,\mathrm{Sen}(6\pi\times10^9 t + \pi/3)\ \mathrm{V/m}$ en $x = 0$, escriba la expresión para **H** en función de x y t.

Solución:

Para responder pregunta (a) necesito conocer el parámetro α.

$$\frac{g}{\omega\varepsilon} = 0,05 \quad \Rightarrow \quad g = 0,02$$

Puesto que $\dfrac{g}{\omega\varepsilon} = 0,05 << 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{g}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

Coeficiente de atenuación: $\alpha = \dfrac{g}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = 0,01\times 377\times\dfrac{1}{\sqrt{2,5}} = 2,38$

Parte a)

$$e^{-2,38\,x} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad x = 0,29\,\mathrm{m}$$

Parte b) Impedancia intrínseca:

$$\eta_C = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(1 + i\frac{g}{2\omega\varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad \eta_C = \frac{377}{\sqrt{2,5}}\,(1 + 0,025\,i) \quad \Rightarrow \quad \eta_C = 238\,e^{i(0,025)}$$

Coeficiente de fase: $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \ \Rightarrow\ \beta = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{2,5} \quad \Rightarrow \quad \beta = 99,3$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6,3\ \mathrm{cm} \quad ; \quad \mathrm{v} = \frac{\omega}{\beta} \quad \Rightarrow \quad 1,9\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

parte c)

$$\vec{E}\,(x,t) = \hat{e}_y 50\, e^{-\alpha x}\,\text{Sen}\,(6\pi\times10^9 t - \beta x + \pi/3)\ \text{V/m}$$

De ecuaciones (32):

$$\vec{H}(x,t) = \hat{e}_x \times \hat{e}_y \frac{50}{\eta}\, e^{-\alpha x}\,\text{Sen}(6\pi\times10^9 t - \beta x + \pi/3 - \varphi/2)\ \text{A/m}$$

$$\vec{H}(x,t) = \hat{e}_z\, 0{,}21\, e^{-2{,}38 x}\,\text{Sen}(6\pi\times10^9 t - 99{,}3 x + \pi/3 - 0{,}025)\ \text{A/m}$$

13.4 POLARIZACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

La polarización de las ondas electromagnéticas es el concepto que explica la evolución de la dirección del campo eléctrico de una onda en función del tiempo y de la posición. Una vez especificada la dirección de **E**, la dirección de **H** queda establecida por las ecuaciones (16).

Sin pérdida de generalidad podemos estudiar la polarización de las ondas planas suponiendo que éstas se propagan en la dirección del eje Z.

En general, para ondas electromagnéticas que se propagan en la dirección del eje Z, el campo eléctrico puede estar en cualquier dirección del plano XY.

$$\vec{E}_C = (E_1 e^{i\theta_1}\,\hat{e}_x + E_2 e^{i\theta_2}\hat{e}_y)\ e^{i(\omega t - kz)}$$

Considerando que k es real, las componentes del campo eléctrico real serán entonces:

$$E_x = E_1\,\text{Cos}(\omega t - k\,z + \theta_1)$$

$$E_y = E_2\,\text{Cos}(\omega t - k\,z + \theta_2)$$

Definiendo el parámetro $P = (\omega t - k\,z)$

$$E_x = E_1\,\text{Cos}(P + \theta_1)$$

$$E_y = E_2\,\text{Cos}(P + \theta_2)$$

podemos verificar que éstas son las ecuaciones paramétricas de una elipse

$$\frac{E_x}{E_1} = \text{Cos}\, P \,\text{Cos}\, \theta_1 - \text{Sen}\, P \,\text{Sen}\, \theta_1 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{E_y}{E_2} = \text{Cos}\, P \,\text{Cos}\, \theta_2 - \text{Sen}\, P \,\text{Sen}\, \theta_2 \qquad \text{(ii)}$$

Multiplicando (i) por $\text{Sen}\,\theta_2$ y (ii) por $-\text{Sen}\,\theta_1$ y sumando miembro a miembro:

$$\frac{E_x}{E_1}\text{Sen}\theta_2 - \frac{E_y}{E_2}\text{Sen}\,\theta_1 = \text{Cos}\, P \,\text{Sen}\,(\theta_2 - \theta_1) \qquad \text{(iii)}$$

Multiplicando (i) por $\text{Cos}\,\theta_2$ y (ii) por $-\text{Cos}\,\theta_1$ y sumando miembro a miembro:

$$\frac{E_x}{E_1}\text{Cos}\,\theta_2 - \frac{E_y}{E_2}\text{Cos}\,\theta_1 = \text{Sen}\, P \,\text{Sen}\,(\theta_2 - \theta_1) \qquad \text{(iv)}$$

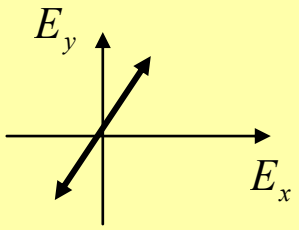
Elevando al cuadrado (iii) y (iv) y sumando miembro a miembro obtenemos:

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_1}\right)\left(\frac{E_y}{E_2}\right)\text{Cos}\,(\theta_2 - \theta_1) + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = \text{Sen}^2\,(\theta_2 - \theta_1)$$

En general, la dirección del vector campo eléctrico de una onda plana describe una elipse en el plano perpendicular a la dirección de propagación. La magnitud de los ejes mayor y menor así como la orientación de estos depende de los módulos E_1 y E_2 y de la diferencia de fase. En algunos casos la elipse degenera en un segmento o una circunferencia. Veamos:

Caso 1. Si $\Delta = \theta_2 - \theta_1 = 0$

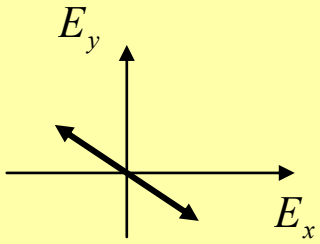
$$\left(\frac{E_x}{E_1} - \frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{E_1}{E_2}$$



Polarización lineal.

Caso 2. **Si** $\Delta = \theta_2 - \theta_1 = \pi$

$$\left(\frac{E_x}{E_1} + \frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x}{E_y} = -\frac{E_1}{E_2}$$

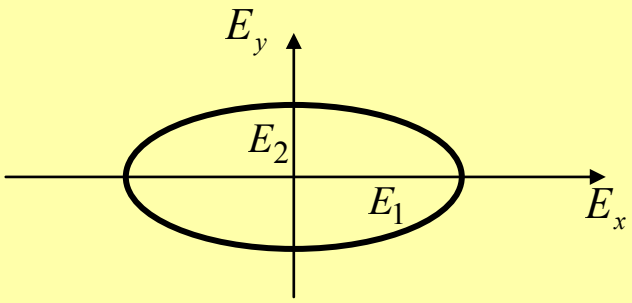


Polarización lineal .

Caso 3. **Si** $\Delta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1$$

polarización elíptica con los ejes mayor y menor de la elipse en las direcciones de los ejes *X* y *Y*.



Caso 4. Si $\Delta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ y $E_1 = E_2 = E$

$$E_x^2 + E_y^2 = E^2$$

polarización circular.

POLARIZACION IZQUIERDA, DERECHA Y HELICIDAD DE LAS ONDAS

La evolución de la dirección del campo eléctrico de una onda plana se puede analizar de dos maneras:

(i) Considerando un punto fijo del eje *Z* y observando como varía en ese punto la dirección de E conforme transcurre el tiempo.

(ii) Considerando un instante determinado y observando como varía la dirección del campo eléctrico en función de la posición (z).

Ejemplo 5: Consideremos la onda cuyo campo eléctrico está dado por:

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(\omega t - k\, z)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}(\omega t - k\, z + \frac{\pi}{2})$$

(a) Suponga $z = 0$ y describa en qué sentido varía la dirección del campo eléctrico con el transcurrir del tiempo.

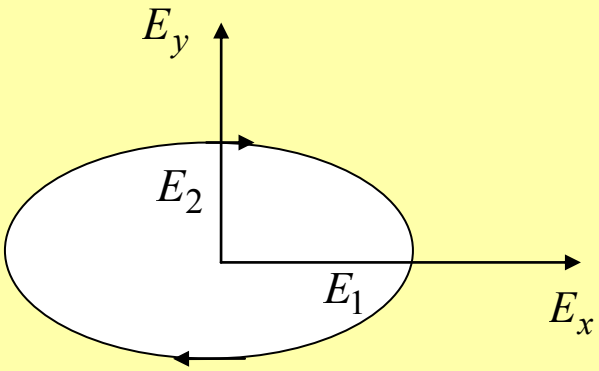
(b) Suponga $t = 0$ y describa en qué sentido varía la dirección del campo eléctrico a medida que *z* aumenta.

Solución: (a) Si $z = 0$

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(\omega\, t)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Basta ver que en $t = 0$ el campo es $\vec{E} = E_1\, \hat{e}_x$ y en el instante posterior $\omega t = \pi/2$ se tiene $\vec{E} = -E_2\, \hat{e}_y$ para decir que el campo eléctrico describe una elipse en sentido horario



(b) Si $t = 0$

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(-k\, z)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}(-k\, z + \frac{\pi}{2})$$

Basta ver que en $z = 0$ el campo es $\vec{E} = E_1 \hat{e}_x$ y que en $z = \lambda/4$ se tiene $\vec{E} = E_2 \hat{e}_y$ para decir que el campo eléctrico describe una hélice cuya proyección sobre el plano *XY* es una elipse recorrida por **E** en sentido antihorario.

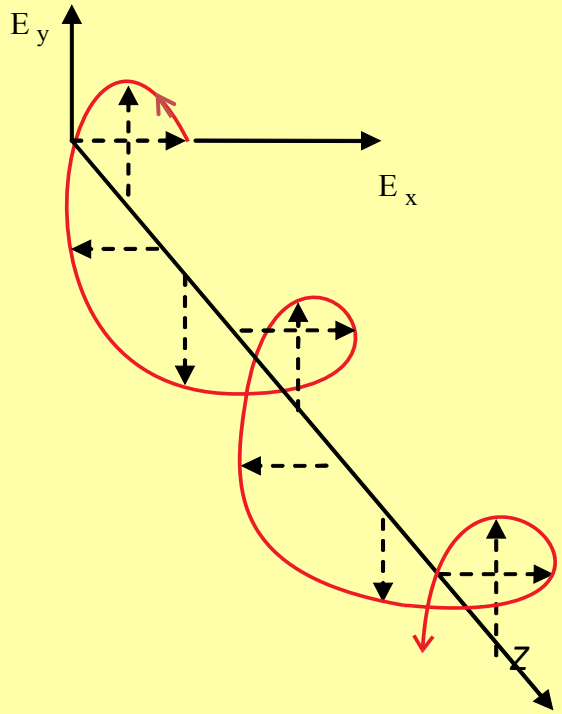


Fig. 3. Si el observador mira hacia la fuente, el campo eléctrico describe una hélice siguiendo la regla de la mano derecha. A este tipo de polarización se llama polarización derecha o de helicidad positiva. Las flechas segmentadas indican la dirección de **E** para valores de $z = 0, \lambda/4, \lambda/2, 3\lambda/4, \lambda, \ldots$

Ejemplo 6: Consideremos la onda cuyo campo eléctrico está dado por:

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}(\omega t - k\, z - \frac{\pi}{2})$$

(a) Suponga $z = 0$ y describa en qué sentido varía la dirección del campo eléctrico con el transcurrir del tiempo.

(b) Suponga $t = 0$ y describa en qué sentido varía la dirección del campo eléctrico a medida que z aumenta.

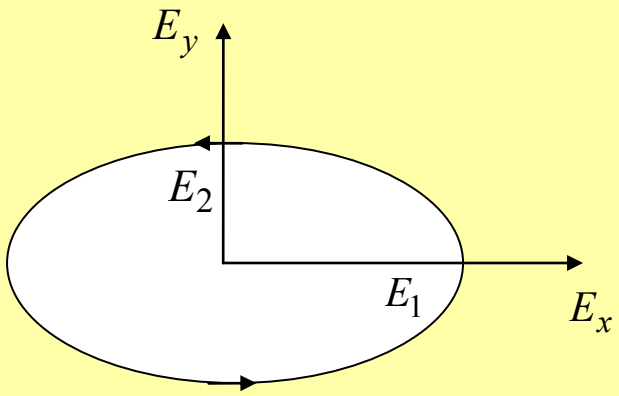
Solución:

(a) Si $z = 0$

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(\omega t)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Observando que en $t = 0$ el campo es $\vec{E} = E_1 \hat{e}_x$ y en el instante posterior $\omega t = \pi/2$ se tiene $\vec{E} = E_2 \hat{e}_y$, podemos decir que el campo eléctrico describe una elipse en sentido antihorario



(b) Si $t = 0$

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(-kz)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}\left(-kz - \frac{\pi}{2}\right)$$

Observando que en $z = 0$ el campo es $\vec{E} = E_1 \hat{e}_x$ y que en $z = \lambda/4$ se tiene $\vec{E} = -E_2 \hat{e}_y$, podemos decir que el campo eléctrico describe una hélice cuya proyección en el plano *XY* es una elipse recorrida en sentido horario.

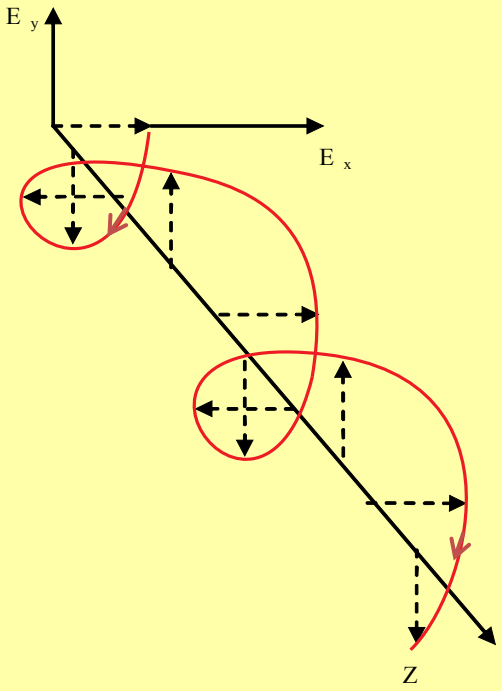


Fig. 4. Si el observador mira hacia la fuente, el campo eléctrico describe una hélice en oposición a la regla de la mano derecha. A este tipo de polarización se llama polarización izquierda o de helicidad negativa. Las flechas segmentadas indican la dirección de **E** para valores de $z = 0,\ \lambda/4,\ \lambda/2,\ 3\lambda/4,\ \lambda, \ldots$

Generalización del concepto: En general para ondas descritas en la forma

$$E_x = E_1 \operatorname{Cos}(\omega t - k\, z)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{Cos}(\omega t - k\, z + \Delta)$$

con Δ positivo se tendrá helicidad positiva o polarización derecha y con Δ negativo helicidad negativa o polarización izquierda.

La regla es que, si el observador mirando a la fuente y colocando su pulgar derecho estirado en la dirección de propagación y los otros dedos cerrados observa que el campo eléctrico se acerca a él girando en la dirección indicada por los dedos de su mano derecha entonces se tiene polarización derecha o helicidad positiva.

Ejemplo 7 Describa la polarización de la onda representada por el fasor:

$$\vec{E}(z) = E_0\,(\hat{e}_x - i\,\hat{e}_y)\,e^{-ikz}$$

Solución:

$$E_{xC} = E_0\, e^{i(\omega t - k\, z)}$$

$$E_{yC} = E_0\, e^{-i\pi/2}\, e^{i(\omega t - k\, z)}$$

$$E_x = E_0 \,\mathrm{Cos}(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_0 \,\mathrm{Cos}\left(\omega t - k\,z - \frac{\pi}{2}\right)$$

La polarización es circular con helicidad negativa.

Ejemplo 8: El campo $\vec{E}$ de una onda plana que se propaga en un medio dieléctrico no magnético está dado por:

$$\vec{E}\,(z,t) = \hat{e}_x 2\,\mathrm{Cos}\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right) - \hat{e}_y\,\mathrm{Sen}\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right)\ \mathrm{V/m}$$

a) Determine la frecuencia y la longitud de onda

b) ¿Cuál es la constante dieléctrica del medio?

c) Describa la polarización de la onda

d) Encuentre el campo **H** correspondiente

Solución:

a) $f = \dfrac{10}{6.28} \times 10^7\,\mathrm{Hz} = 1{,}59 \times 10^7\,\mathrm{Hz}$ $\qquad k = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 10{,}88\ \mathrm{m}$

b) $\mathrm{v} = \lambda f = 1{,}73 \times 10^8 \Rightarrow n = 1{,}73 \Rightarrow \varepsilon_r = 3$

c) La onda también se puede escribir como:

$$\vec{E}(z,t) = \hat{e}_x 2\mathrm{Cos}\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right) + \hat{e}_y \mathrm{Cos}\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{V/m}$$

Polarización elíptica con helicidad positiva. $\eta = \dfrac{377}{\sqrt{3}} = 218\Omega$

$$\vec{H}\,(z,t) = \hat{e}_y 9{,}17\,\mathrm{Cos}\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right) - \hat{e}_x\,4{,}59\,\mathrm{Cos}\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{mA/m}$$

13.5 PROMEDIO TEMPORAL DE LA ENERGÍA Y DEL VECTOR DE POYNTING

Como se ha dicho anteriormente (ecs. 29), para una onda linealmente polarizada:

$$\vec{E_C} = \hat{e}\, E_0\, e^{-\alpha z}\, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{29a}$$

$$\vec{H_C} = \hat{h}\, H_0\, e^{-\alpha z} e^{-i\varphi/2}\, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{29b}$$

Las respectivas partes reales son

$$\vec{E} = \hat{e}\, E_0\, e^{-\alpha z}\, \mathrm{Cos}\,(\omega t - \beta z) \tag{36a}$$

$$\vec{H} = \hat{h}\, H_0\, e^{-\alpha z}\, \mathrm{Cos}(\omega t - \beta z - \varphi/2) \tag{36b}$$

El vector de Poynting en cada instante

$$\vec{\pi} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{\pi} = \hat{e}_p\, E_0\, H_0\, e^{-2\alpha z} \left(\mathrm{Cos}\,\omega t\, \mathrm{Cos}\,\beta z + \mathrm{Sen}\,\omega t\, \mathrm{Sen}\,\beta z\right) \times \left[\mathrm{Cos}\,\omega t\, \mathrm{Cos}(\beta z + \varphi/2) + \mathrm{Sen}\,\omega t\, \mathrm{Sen}(\beta z + \varphi/2)\right] \tag{37}$$

El vector de Poynting promediado en un período

El vector de Poynting como está escrito en ec. (37) es una cantidad que varía muy rápidamente y no hay manera de medirla experimentalmente. Es más útil en las aplicaciones y en las interpretaciones físicas el promedio del vector de Poynting en un período *T*. Para calcular este período tenemos que efectuar el producto indicado de la ecuación (37) e integrar en un período y dividir por *T*. Efectuando estas operaciones se tiene:

$$\boxed{\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \hat{e}_p\, \frac{E_0 H_0}{2}\, e^{-2\alpha z}\, \mathrm{Cos}\,\varphi/2} \tag{38}$$

Este mismo resultado se puede obtener de una forma más práctica, de la siguiente manera:

Multiplicando directamente el valor del campo eléctrico complejo (29a) por el conjugado del campo magnético complejo (29b), tomando la parte real y dividiendo por 2.

$$\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \frac{1}{2} \Re e \left\{ \vec{E}_C \times \vec{H}_C^* \right\} \tag{39}$$

Densidades de energía promediadas en el tiempo:

De manera análoga a lo mostrado para el vector de Poynting se puede obtener el valor promedio de la densidad de energía eléctrica en un punto.

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 e^{-2\alpha z} (\mathrm{Cos}\,\omega t \,\mathrm{Cos}\,\beta z + \mathrm{Sen}\,\omega t \,\mathrm{Sen}\,\beta z)^2$$

$$\left\langle u_E \right\rangle = \frac{1}{4} \varepsilon E_0^2 e^{-2\alpha z} \tag{40a}$$

$$\left\langle u_E \right\rangle = \frac{1}{4} \varepsilon \{ \vec{E}_C \bullet \vec{E}_C^* \} \tag{40b}$$

Y para la energía magnética:

$$u_M = \frac{1}{2} \mu H_0^2 e^{-2\alpha z} \left[\mathrm{Cos}\,\omega t \mathrm{Cos}(\beta z + \varphi/2) + \mathrm{Sen}\,\omega t \mathrm{Sen}\left(\beta z + \varphi/2\right) \right]^2$$

$$\left\langle u_M \right\rangle = \frac{1}{4} \mu H_0^2 e^{-2\alpha z} \tag{41a}$$

$$\left\langle u_M \right\rangle = \frac{1}{4} \mu \{ \vec{H}_C \bullet \vec{H}_C^* \} \tag{41b}$$

Energía y vector de Poynting promedio en dieléctricos perfectos:

Obtenemos primero una expresión para la densidad de energía electromagnética total en cualquier punto de un aislante perfecto $\alpha = 0$; $\varphi = 0$ por donde se propaga la onda electromagnética

$$\langle u_M \rangle = \frac{1}{4}\,\mu\,\frac{1}{\eta^2}\left\{\vec{E}_C \bullet \vec{E}_C^{\,*}\right\} = \frac{1}{4}\,\mu\,\frac{\varepsilon}{\mu}\left\{\vec{E}_C \bullet \vec{E}_C\right\} = \langle u_E \rangle$$

$$\langle u \rangle = \langle u_M \rangle + \langle u_E \rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E_0^2$$

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E_0^2}$$

Establecemos ahora la relación entre el vector de Poynting y la densidad de energía electromagnética.

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\;E_0\;H_0\;\hat{e}_p = \frac{1}{2}\,\frac{E_0^2}{\eta}\;\hat{e}_p \qquad (42a)$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\,E_0^2\,\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\;\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon}}\,\hat{e}_p$$

$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \langle u \rangle\;\vec{\mathrm{v}}} \qquad (42b)$$

Energía y vector de Poynting promedio en medios disipativos:

Obtenemos primero una expresión para la densidad de energía electromagnética total en cualquier punto de un medio disipativo (o conductor) por donde se propaga la onda electromagnética

$$\langle u_M \rangle = \frac{1}{4}\,\mu\left\{\frac{\vec{E}_C}{\eta_C} \bullet \frac{\vec{E}_C^{\,*}}{\eta_C^*}\right\} = \frac{1}{4}\,\mu\,e^{-2\alpha z}\;E_0^2\,\frac{|\varepsilon_C|}{\mu}$$

$$\langle u_M \rangle = \frac{1}{4}\;e^{-2\alpha z}\;E_0^2\;\varepsilon\left(1 + \frac{g^2}{\omega^2\,\varepsilon^2}\right)^{1/2}$$

$$\langle u \rangle = \langle u_M \rangle + \langle u_E \rangle = \frac{1}{4}\,\varepsilon\,E_0^2\,e^{-2\alpha z}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right),$$

y usando la ec. (28b):

$$\langle u \rangle = \langle u_M \rangle + \langle u_E \rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon\, E_0^2\, e^{-2\alpha z}\left(\frac{\beta^2}{\omega^2 \mu\,\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{1}{2}\; E_0^2\, e^{-2\alpha z}\,\frac{1}{\mu \mathrm{v}^2}} \qquad (43)$$

Nótese que hemos observado que en medios disipativos las densidades de energía eléctrica y magnética tienen valores diferentes. Empezamos ahora una deducción detallada de la relación entre vector de Poynting promedio y densidad de energía promedio para ondas en medios conductores:

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\;\Re e\left\{\vec{E}_C \times \vec{H}_C^{*}\right\} = \frac{1}{2}\;\frac{E_0^2}{|\eta|}\;e^{-2\,\alpha\, z}\;\mathrm{Cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\hat{e}_p$$

El módulo de η se obtiene directamente de la ec (33) y usamos una identidad trigonométrica para reemplazar el término $\mathrm{Cos}(\varphi/2)$.

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\left(\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}\right)^{1/4} e^{-2\alpha z}\;\mathrm{Cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\;\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\;\left(\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}\right)^{1/4} e^{-2\alpha z}\;\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\varphi}{2}}\;\hat{e}_p$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\left(\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}\right)^{1/4} e^{-2\alpha z}\left(\frac{1+\dfrac{\omega\,\varepsilon}{\sqrt{\omega^2\,\varepsilon^2 + g^2}}}{2}\right)^{1/2}\hat{e}_p$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\left(\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}\right)^{1/4} \frac{e^{-2\alpha z}}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \dfrac{g^2}{\omega^2}}}\right)^{1/2}\hat{e}_p$$

$$\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\frac{e^{-2\alpha z}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{g^2}{\omega^2}} + \varepsilon\right)^{1/2} \hat{e}_p$$

$$\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\frac{e^{-2\alpha z}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right)^{1/2} \hat{e}_p$$

Usamos ahora la relación (28b) para obtener:

$$\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu}}\, e^{-2\alpha z}\frac{\beta}{\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu}}\, \hat{e}_p \qquad (44a)$$

$$\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu}\,\frac{e^{-2\alpha z}}{\mathrm{v}}\,\hat{e}_p \qquad (44b)$$

Comparando la ecuación (44b) con la ec. (43) queda establecido que:

$$\boxed{\left\langle \vec{\pi} \right\rangle = \langle u \rangle\, \mathrm{v}\, \hat{e}_p} \qquad (45)$$

INTENSIDAD DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

De acuerdo con lo dicho en la sección 5 del capítulo 12, el módulo del vector de Poynting promediado en el tiempo es la potencia por unidad de área que en promedio transporta una onda electromagnética. Al módulo del vector de Poynting también se le llama intensidad de la onda (Y). De modo que la ecuación (44b) puede escribirse en la forma:

$$Y = Y_0\, e^{-2\alpha z} \qquad (46)$$

donde $Y_0 = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu\,\mathrm{v}}$.

ATENUACIÓN DE UNA ONDA EN NEPERS Y EN DECIBELES

Hay varias formas de expresar la atenuación de la intensidad de una onda.

1) Expresando que la distancia

$$\delta' = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2\alpha}$$

es la distancia a la cual la intensidad de la onda se atenúa en un factor e^{-1} = 0,37.

2) Dando el logaritmo neperiano de la razón de intensidades en dos puntos.

$$\text{Atenuación (nepers)} = -\ln\left(\frac{Y}{Y_0}\right) = 2\alpha z$$

En este caso podemos decir que la atenuación de la onda (de la intensidad de de la onda) por unidad de longitud es 2α neper/m.

3) La atenuación en decibeles de una onda, por convención se expresa como:

$$\text{Atenuación (dB)} = -10\log_{10}\frac{Y}{Y_0} = -10\log_{10}e^{-2\alpha z}$$

Puesto que $\log_{10} e = 0,4343$, entonces:

$$\text{Atenuación (dB)} = 8,69\,\alpha z \qquad (47)$$

es decir, la atenuación por unidad de longitud, de una onda con parámetro de atenuación α es: 8.69α dB/m.

Nota : La distancia

$$\delta'' = \frac{10}{8,69\,\alpha}$$

es la distancia a la cual la intensidad de la onda se atenúa por un factor de 10.

Ejemplo 9: Las intensidades de una OEM plana en los puntos P_1 y P_2 ubicados entre sí a una distancia de 50 m a lo largo de la dirección de propagación de la onda son respectivamente 80 y 60 W/m^2. Encuentre:

a) la atenuación en nepers y en decibeles

b) la atenuación por unidad de longitud en nepers y en decibeles

c) ¿a qué distancia del punto P_2 la intensidad de la onda será 6 W/m^2.

Solución:

a) Atenuación $= -\ln\left(\frac{60}{80}\right) = 0,288 \text{ nepers}$

Atenuación $= -10 \log_{10} \frac{60}{80} = 1,249 \text{ dB}$

b) Atenuación por unidad de longitud = $2\alpha = 5,76 \times 10^{-3}$ nepers/m

Atenuación por unidad de longitud = $8,69\,\alpha = 0,025$ dB/m

d) La intensidad de la onda será 6 W/m^2 a una distancia

$$\delta'' = \frac{10}{8,69\,\alpha} = 400 \text{ m}$$

del punto P_2.

PROBLEMAS

1. La rapidez promedio con que la energía de la radiación solar incide sobre la superficie de la Tierra es 1340 W/m^2. Asumiendo que la radiación es una onda plana linealmente polarizada, encuentre las amplitudes de **E** y de **B**.

2. Determine y compare la impedancia intrínseca, la constante de atenuación del campo eléctrico (en nepers/m), la constante de atenuación de la intensidad de la onda (en dB/m) y la profundidad de penetración del cobre y del bronce para una onda con frecuencia a) 1 MHz b) 4 GHz.
Datos: conductividades g_{Cu} = 5,8 x 10^7 (ohm.m)$^{-1}$ y g_{br} = 1,6 x 10^7 (ohm.m)$^{-1}$.

3. Si la profundidad de penetración del grafito a 100 MHz es 0,16 mm, determine (a) la conductividad del grafito y (b) la distancia a la cual la intensidad de una onda de 1 GHz en el grafito se reduce en 30 dB.

4. Demuestre que el vector de Poynting instantáneo de una onda plana con polarización circular que se propaga en un medio sin pérdidas es una constante independiente del tiempo y la posición.

5. Una onda plana se propaga en la dirección +z desde la superficie hacia el fondo del océano ($\varepsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$, $g = 4\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$). El campo magnético de la onda en la superficie del océano ($z = 0$) es $\vec{H}(0,t) = \hat{e}_y 0{,}3\mathrm{Cos}(2\pi \times 10^8 t)\ \mathrm{A/m}$.

a) Determine la profundidad de penetración y la impedancia intrínseca del océano.

b) Determine las expresiones **E**(z, t) y **H**(z, t) en el océano.

c) Exprese la intensidad de la onda en función de la profundidad z.

6. El campo eléctrico de una onda electromagnética plana está dado por:

$$\vec{E} = \hat{e}_x\, e^{-y-z}\ \mathrm{Cos}\,(2\pi \times 10^3\, t - y - z)\ \mathrm{mV/m}$$

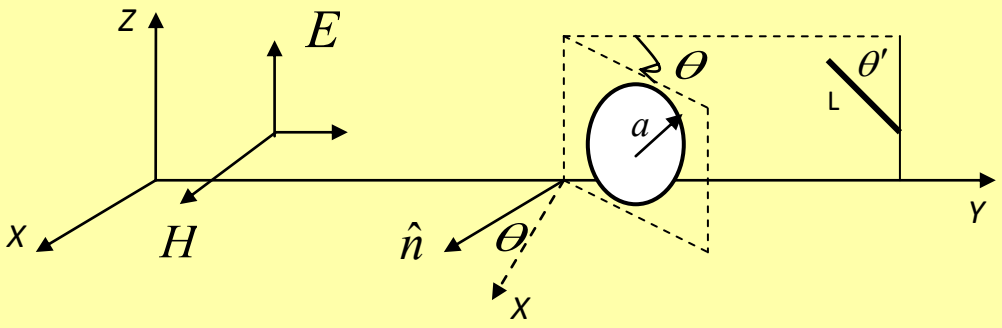
Diga cuál es:

a) La dirección de propagación de la onda
b) La dirección del campo intensidad magnética **H**
c) El valor de la conductividad eléctrica g del medio
d) La Expresión del campo **H** en función de la posición y el tiempo.

7. Una OEM plana con polarización lineal se propaga en el aire a lo largo del eje *Y*. **E** es paralelo al eje *Z* , con amplitud de 50 mV/m y la frecuencia es de 10 MHz. Hallar la fuerza electromotriz cuadrática media inducida en :

a) la antena de lazo de radio a = 20 cm mostrada en al figura

b) la antena de varilla de longitud L = 30 cm mostrada en la figura.



8. Considere la superposición de dos ondas electromagnéticas planas linealmente polarizadas en direcciones perpendiculares:

$$\vec{E_C} = E_1 e^{i(\omega t - k z + \theta_1)} \hat{e}_x + E_2 e^{i(\omega t - k z + \theta_2)} \hat{e}_y$$

donde E_1, E_2 y k son reales positivos. Encontrar el vector de Poynting promedio de la onda resultante y verificar que es la suma de los vectores de Poynting promedio de las componentes.

9. Considere la superposición de dos ondas electromagnéticas planas linealmente polarizadas en la misma dirección:

$$\vec{E_C} = E_1 \; e^{i(\omega t - k z + \theta_1)} \hat{e}_x + E_2 \; e^{i(\omega t - k z + \theta_2)} \hat{e}_x$$

donde E_1, E_2 y k son reales positivos. Encontrar el vector de Poynting promedio de la onda resultante y verificar que no es la suma de los vectores de Poynting promedio de las componentes.

10. El campo eléctrico complejo de una onda electromagnética plana está dado por:

$$\vec{E_C} = E_0 \left\{(3+2i)\hat{e}_x + (3+4i)\hat{e}_y\right\} e^{i(\omega t - kz)}$$

donde E_0 y k son reales positivos. Encuentre

a) las amplitudes reales de las componentes x y y del campo eléctrico.

b) la diferencia de fase entre ambas componentes

c) diga si la polarización elíptica es derecha o izquierda

d) el ángulo entre el eje mayor de la elipse y el eje *X*.

11. Una OEM plana con frecuencia 10 MHz se propaga a través de un material disipativo. Se observa un cambio de fase por unidad de longitud de 1,0 rad/m y su amplitud se reduce en un 50% por cada metro de recorrido. Halle α , β, la velocidad de propagación y también la atenuación de la onda en dB/m.

12. Una onda plana viaja en la dirección positiva del eje Z dentro de un material de conductividad g. (a) Escriba una expresión para la potencia por unidad de volumen perdida por efecto Joule y promédiela en un período *T* para cualquier z. (b) Encuentre la potencia total por unidad de área perdida entre z = 0 y $z \to \infty$. (c) Compare su resultado anterior con el vector de Poynting promedio evaluado en z = 0. (d) Explique en dos o tres líneas el resultado de la comparación en (c).

13. Una onda electromagnética plana de frecuencia 10^{12} Hz se propaga en un medio de constantes $g = 5\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$; $\varepsilon_r = 81$; $\mu_r = 1$. Calcular el número de longitudes de onda que debe recorrer para que su potencia promedio temporal transmitida se reduzca al 10% del valor inicial.

CAPÍTULO 14

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS

14.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA GENERAL

En este capítulo consideramos el siguiente problema: Suponemos que en el espacio existen dos medios semi infinitos separados por una interface plana. Al vector unitario perpendicular a la interface, lo llamaremos la normal. En el medio 1 se propaga una onda electromagnética plana con frecuencia ω_I y vector de onda $\vec{k}_I$ haciendo un ángulo θ_I con la normal. Cuando esta onda llega al plano frontera se descompone en dos: una onda transmitida al medio 2 con frecuencia ω_T y vector de onda $\vec{k}_T$ y una onda reflejada con frecuencia ω_R y vector de onda $\vec{k}_R$ haciendo un ángulo θ_R con la normal.

El problema consiste en establecer la relación entre los parámetros de las ondas reflejada y transmitida (refractada o desviada), con los parámetros de la onda incidente y con las propiedades de los medios involucrados (índice de refracción o impedancia intrínseca).

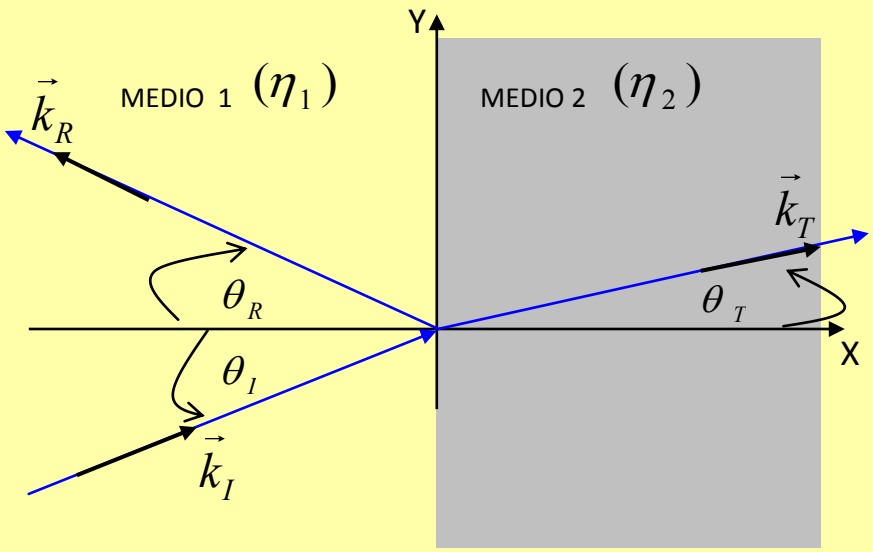


Fig. 1 Problema General: Conociendo las propiedades de los medios y los parámetros de la onda incidente, hallar los parámetros de las ondas reflejada y transmitida

14.2 CONDICIONES DE FRONTERA EN LA INTERFACE

Los campos eléctricos y magnéticos de las ondas incidente, reflejada y transmitida se pueden plantear de la siguiente forma:

$$\vec{E}_I = \vec{E}_{I0}\, e^{i\omega_I t}\, e^{-i\vec{k}_I \bullet \vec{r}} \qquad \vec{H}_I = \vec{H}_{I0}\, e^{i\omega_I t}\, e^{-i\vec{k}_I \bullet \vec{r}} \tag{1a}$$

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{R0}\, e^{i\omega_R t}\, e^{-i\vec{k}_R \bullet \vec{r}} \qquad \vec{H}_R = \vec{H}_{R0}\, e^{i\omega_R t}\, e^{-i\vec{k}_R \bullet \vec{r}} \tag{1b}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{T0}\, e^{i\omega_T t}\, e^{-i\vec{k}_T \bullet \vec{r}} \qquad \vec{H}_T = \vec{H}_{T0}\, e^{i\omega_T t}\, e^{-i\vec{k}_T \bullet \vec{r}} \tag{1c}$$

Estos campos además de satisfacer la ecuación de onda y las ecuaciones de Maxwell deben satisfacer las condiciones de frontera resumidas en la sección 8 del capítulo 12. En particular, las condiciones:

$$\vec{E}_{1\tan} = \vec{E}_{2\tan} \tag{2a}$$

$$\vec{H}_{1\tan} = \vec{H}_{2\tan} \tag{2b}$$

PLANO DE INCIDENCIA

Nótese que no hay pérdida de generalidad al asumir que la dirección del eje *X* es la normal y que la interface es el plano *YZ*.

Se llama plano de incidencia al plano definido por la normal y por la dirección del vector de onda incidente. De acuerdo a esta definición, plano de incidencia es el de la figura (1) o plano *XY*.

El cumplimiento de las condiciones de frontera por los campos de las ecs (1) se puede analizar en dos partes:

(i) Para las funciones exponenciales complejas (en esta sección)

(ii) Para amplitudes de las ondas (en las secciones 14.3 y 14.4)

Para que las funciones exponenciales temporales de los campos de las ecuaciones (1) satisfagan las condiciones (2) en todo instante debe cumplirse que:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega \tag{3}$$

Para que las funciones exponenciales espaciales satisfagan (2) debe cumplirse para todos los puntos en la frontera, es decir, para puntos en el plano YZ:

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \tag{4}$$

Si consideramos en particular un punto de frontera de la forma $\vec{r} = z\,\hat{e}_z$ y recordamos que por definición $\vec{k}_I$ no tiene componente en el eje *Z*. podemos concluir que: para que los campos de la ecs (1) satisfagan las condiciones de frontera (2), *los tres vectores de onda*: $\vec{k}_I$, $\vec{k}_R$ y $\vec{k}_T$ *deben estar contenidos en el plano de incidencia.*

LEY DE REFLEXION Y LEY DE SNELL

Por otro lado, para que en el plano frontera (YZ) se satisfaga la ec. (4) debe cumplirse que:

$$k_I \,\mathrm{Sen}\,\theta_I = k_R \,\mathrm{Sen}\,\theta_R \tag{5a}$$

$$k_I \,\mathrm{Sen}\,\theta_I = k_T \,\mathrm{Sen}\,\theta_T \tag{5b}$$

Teniendo en cuenta la relación de dispersión en cada medio: $k = \frac{\omega}{c} n$, podemos obtener de las ecuaciones (5a) y (5b), respectivamente, las dos leyes muy conocidas en óptica:

$$\theta_I = \theta_R = \theta_1 \quad \text{(ley de reflexión)} \tag{6a}$$

$$n_1 \,\mathrm{Sen}\,\theta_1 = n_2 \,\mathrm{Sen}\,\theta_T \quad \text{ó} \quad \boxed{n_1 \,\mathrm{Sen}\,\theta_1 = n_2 \,\mathrm{Sen}\,\theta_2} \quad \text{(ley de Snell)} \tag{6b}$$

14.3 INCIDENCIA NORMAL

Si el vector de onda incidente está en la dirección de la normal, entonces $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y la situación puede ser esquematizada como se ve en la figura (2).

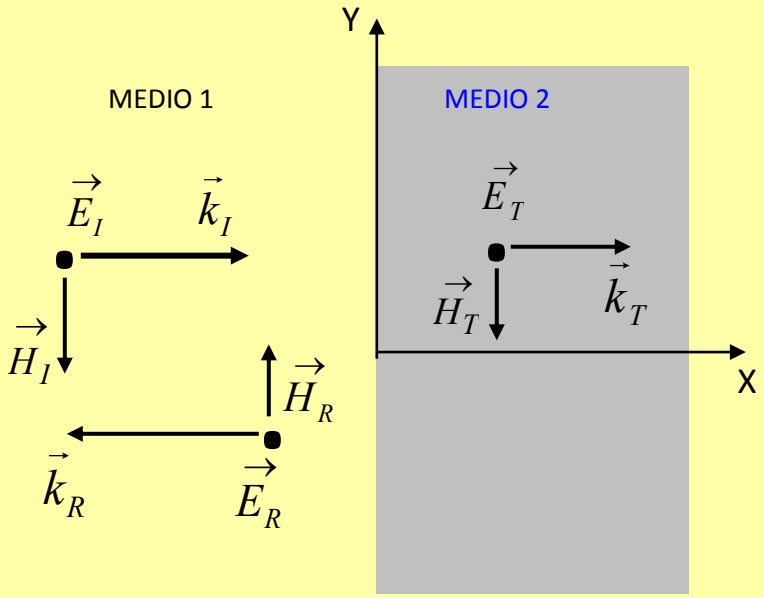


Fig. 2 Esquema para explicar reflexión y transmisión cuando la incidencia es normal.

Los campos de las respectivas ondas, omitiendo el término dependiente del tiempo, están dados por:

$$\vec{E}_I = \hat{e}_z E_{I0} e^{-ik_1 x} \qquad \vec{H}_I = -\hat{e}_y \frac{E_{I0}}{\eta_1} e^{-ik_1 x} \tag{7a}$$

$$\vec{E}_R = \hat{e}_z E_{R0} e^{ik_1 x} \qquad \vec{H}_R = \hat{e}_y \frac{E_{R0}}{\eta_1} e^{ik_1 x} \tag{7b}$$

$$\vec{E}_T = \hat{e}_z E_{T0} e^{-ik_2 x} \qquad \vec{H}_T = -\hat{e}_y \frac{E_{T0}}{\eta_2} e^{-ik_2 x} \tag{7c}$$

Este planteamiento es válido para medios dieléctricos o conductores. Si se trata de medios conductores se considerarán las respectivas impedancias complejas.

COEFICIENTES DE FRESNEL PARA INCIDENCIA NORMAL

Para deducir las relaciones entre las amplitudes de ondas reflejada y transmitida con la amplitud de la onda incidente usamos las condiciones de frontera en la interfase entre los dos medios (x = 0):

$$E_{1\tan}\Big|_{x=0} = E_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad E_{I0} + E_{R0} = E_{T0}$$

$$H_{1\tan}\Big|_{x=0} = H_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{I0} - E_{R0}}{\eta_1} = \frac{E_{T0}}{\eta_2}$$

De resolver estas dos ecuaciones se obtienen E_{T0} y E_{R0} en términos de E_{I0}:

$$E_{T0} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} E_{I0} \qquad E_{R0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} E_{I0}$$

Los coeficientes:

$$\tau_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \tag{8}$$

se llaman coeficientes de Fresnel.

Si la incidencia fuera del medio 2 al medio 1 tendríamos:

$$\tau_{21} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{21} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

Puede verificarse la identidad:

$$\tau_{21}\,\tau_{12} - \Gamma_{21}\,\Gamma_{12} = 1$$

REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN INCIDENCIA NORMAL

Transmitancia es la fracción de la intensidad de una onda electromagnética que se transmite a través de la interface. **Reflectancia** es la fracción de la intensidad de una onda electromagnética que se refleja en la superficie de la interface.

$$R_{12} = \frac{\left|\left\langle \vec{\pi}_r \right\rangle\right|}{\left|\left\langle \vec{\pi}_i \right\rangle\right|} \quad \text{y} \quad T_{12} = \frac{\left|\left\langle \vec{\pi}_t \right\rangle\right|}{\left|\left\langle \vec{\pi}_i \right\rangle\right|} \tag{9}$$

Teniendo en cuenta la ec (42a) del capítulo 13 podemos decir que para una interfase entre **dos medios dieléctricos sin pérdidas**

$$R_{12} = \Gamma_{12}^2 \quad \text{y} \quad T_{12} = \frac{\eta_1}{\eta_2}\,\tau_{12}^2 \tag{10}$$

Si **el medio 1 es dieléctrico y el medio 2 es conductor**, usando la ec. (13-38):

$$R_{12} = \left|\Gamma_{12}\right|^2 \quad \text{y} \quad T_{12} = \frac{\eta_1}{\left|\eta_2\right|}\left|\tau_{12}\right|^2 \mathrm{Cos}\left(\varphi_2/2\right) \tag{11}$$

donde $\varphi_2/2$ es la fase de la impedancia compleja del medio conductor.

COEFICIENTES DE FRESNEL EN FUNCIÓN DE ÍNDICES DE REFRACCIÓN

Teniendo en cuenta que para medios no magnéticos $\mu_r = 1$:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{y} \quad n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\eta_0}{n}$$

$$\tau_{12} = \frac{2\,n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{12}$$

Estas expresiones son válidas para conductores o dieléctricos no magnéticos. En el caso de conductores no magnéticos se puede usar: $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon_C/\varepsilon_0}$

INCIDENCIA NORMAL CUANDO UN MEDIO ES CONDUCTOR PERFECTO

Recordemos que para buenos conductores, la impedancia intrínseca es:

$$\eta_C = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2g}}(1+i) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{g}}\, e^{i\pi/4}$$

Así que cuando $g_2 \to \infty$ tendremos que la impedancia del medio conductor es $\eta_{C2} = 0$. Reemplazando este valor en las ecs. (8) tendremos:

$$\tau_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \Rightarrow \tau_{12} = 0$$

$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \Rightarrow \Gamma_{12} = -1$$

La figura (3) representa esquemáticamente la situación

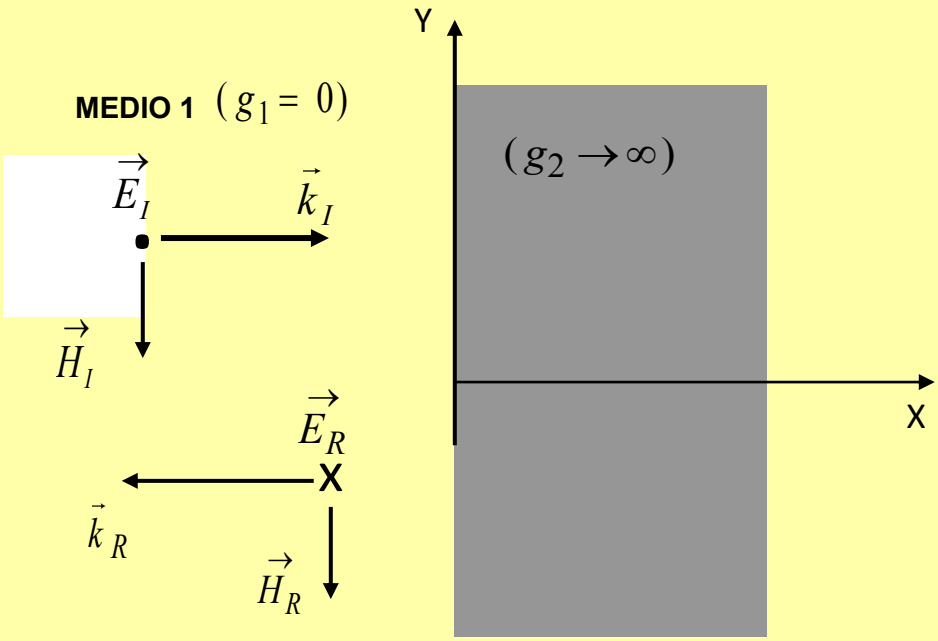


Fig. 3 Cuando el medio 2 es un conductor perfecto, no hay transmitancia. Toda la radiación se refleja. La fase del campo eléctrico cambia 180^0.

En el medio conductor (medio 2)

$$\vec{E}_2 = 0 \qquad \vec{H}_2 = 0$$

En el vacío o medio aislante (medio 1):

$$\vec{E}_I = \hat{e}_z E_{I0} e^{i(\omega t - k_1 x)} \qquad \vec{H}_I = -\hat{e}_y \frac{E_{I0}}{\eta_1} e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

$$\vec{E}_R = -\hat{e}_z E_{I0} e^{i(\omega t + k_1 x)} \qquad \vec{H}_R = -\hat{e}_y \frac{E_{I0}}{\eta_1} e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

Los campos reales totales en el medio 1 son:

$$\vec{E}_1 = \Re e\left[\vec{E}_I + \vec{E}_R\right]$$

$$\vec{H}_1 = \Re e\left[\vec{H}_I + \vec{H}_R\right]$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\vec{E}_1 = \hat{e}_z 2E_{I0} \operatorname{Sen}(k_1 x) \operatorname{Sen}(\omega t)$$

$$\vec{H}_1 = -\hat{e}_y 2\frac{E_{I0}}{\eta_1} \operatorname{Cos}(k_1 x) \operatorname{Cos}(\omega t)$$

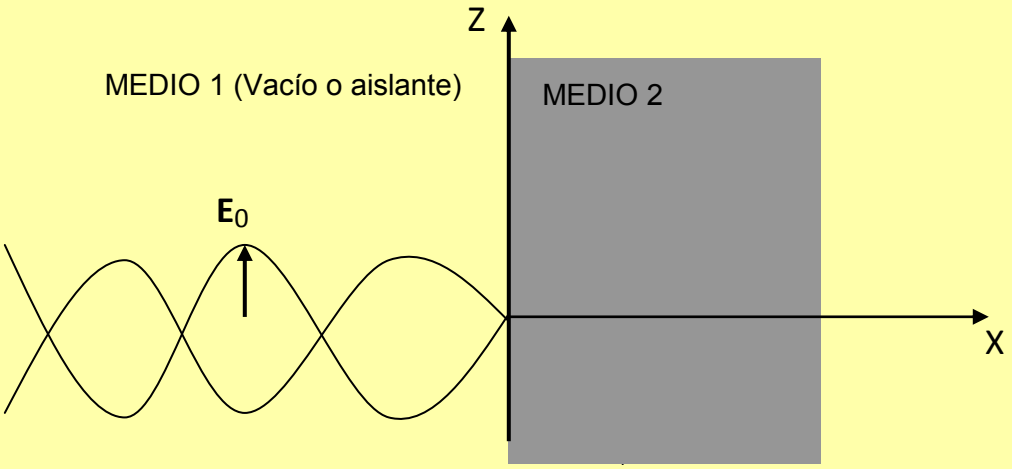
Por evaluación directa del vector de Poynting promedio tendremos:

$$\left\langle \vec{\pi}_1 \right\rangle = \left\langle \vec{E}_1 \times \vec{H}_1 \right\rangle = \vec{0}$$

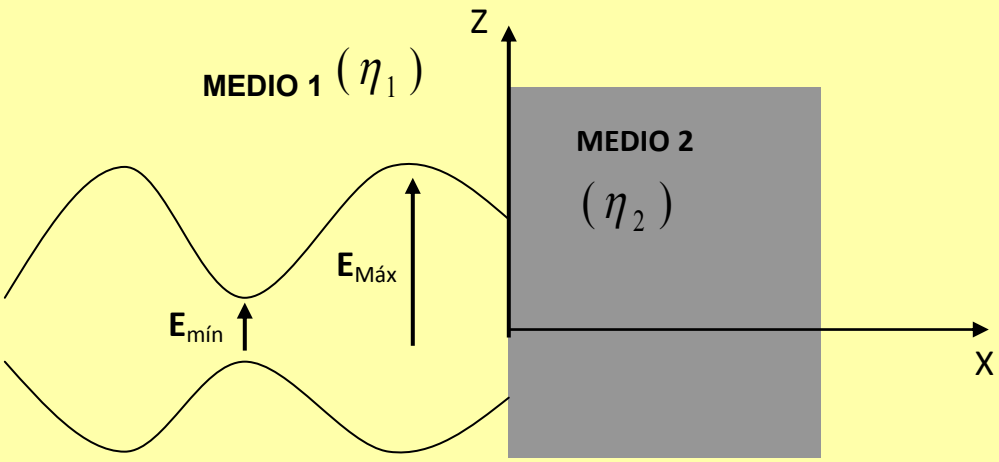
Lo que significa que tenemos una onda estacionaria y por lo tanto no hay flujo de energía.

ONDAS ESTACIONARIAS Y RAZON DE ONDA ESTACIONARIA

Cuando el medio (2) es conductor perfecto, la onda reflejada y onda incidente se superponen y el resultado es una onda estacionaria



Cuando ninguno de los dos medios es conductor perfecto, la superposición de la onda incidente y la reflejada en cualquier instante tendrá el aspecto mostrado en la siguiente figura.



$$\vec{E}_1(x) = \hat{e}_z E_{I0}\, e^{-i k_1 x}\left[1 + \Gamma\, e^{2i k_1 x}\right]$$

$$R.O.E = \frac{|E_{Máx}|}{|E_{mín}|} = \frac{|1 + |\Gamma||}{|1 - |\Gamma||} =$$ RAZÓN DE ONDA ESTACIONARIA

Ejemplo 1. Una onda plana que se propaga en el aire con $\vec{E}_I(x,t) = \hat{e}_y 50\,\text{Sen}\left(10^8 t - \beta x\right)\,\text{V/m}$, incide normalmente sobre un medio semi infinito sin pérdidas $(\varepsilon_r = 2,\ \mu_r = 8)$. Determine:

a) Γ, τ, R y T. b) Los campos reflejados $\vec{E}_R$ y $\vec{H}_R$

c) Los campos transmitidos $\vec{E}_T$ y $\vec{H}_T$; d) La razón de onda estacionaria

Solución:

$$\eta_1 = \eta_0 \quad \text{y} \quad \eta_2 = 2\eta_0$$

$$\tau_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{4}{3} \qquad \Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{1}{3}$$

$$T = \frac{\eta_1}{\eta_2}\tau_{12}^2 = \frac{8}{9} \qquad R = \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\vec{E}_I(x,t) = \hat{e}_y 50\,\text{Sen}\left(10^8 t - \frac{x}{3}\right)\,\text{V/m}.$$

$$\vec{H}_I(x,t) = \hat{e}_z \frac{50}{\eta_1}\,\text{Sen}\left(10^8 t - \frac{x}{3}\right)\,\text{A/m}.$$

b) Onda reflejada: $\vec{E}_R(x,t) = \hat{e}_y \frac{50}{3}\,\text{Sen}\left(10^8 t + \frac{x}{3}\right)\,\text{V/m}.$

$$\vec{H}_R(x,t) = -\hat{e}_z \frac{50}{3\eta_1}\,\text{Sen}\left(10^8 t + \frac{x}{3}\right)\,\text{A/m}.$$

c) Onda transmitida: $\vec{E}_T(x,t) = \hat{e}_y 50\left(\frac{4}{3}\right)\text{Sen}\left(10^8 t - \frac{4}{3}\,x\right)\,\text{V/m}.$

d) Razón de onda estacionaria: $R.O.E = \dfrac{|E_{Máx}|}{|E_{mín}|} = \dfrac{|1 + |\Gamma||}{|1 - |\Gamma||} = 2$

Ejemplo 2. Una onda plana que se propaga en el aire con $\vec{E}_I(z,t) = \hat{e}_y\, 27{,}46\,\mathrm{Sen}\left(2\pi\times 10^9 t - \beta z\right) V/m.$ incide normalmente sobre un medio semi infinito conductor $(\varepsilon_r = 72,\ \mu_r = 1,\ g = 6{,}93)$. Determine:

a) R y T. b) la intensidad de la onda incidente

c) las intensidades de la onda transmitida y de la onda reflejada.

Solución:

Para el medio 1: $\eta_1 = \eta_0 = 377\ \Omega$

Para el medio 2 : $\dfrac{g}{\omega\,\varepsilon} = \dfrac{6{,}93}{2\pi\times 10^9\times 72\times 8{,}85\times 10^{-12}} = 1{,}732$

De la ec. (33) del capítulo 13**:**

$$\eta_2 = \frac{377}{\sqrt{72}\,\sqrt{\sqrt{2}}}\, e^{i\pi/6}\ \Omega = 31.42\, e^{i\pi/6}\,\Omega = 31.42\angle 30^{\mathrm{o}}\ \Omega$$

Usando las ecs. (11) y (8):

$$T = 4\,\frac{|\,\eta_1|\,\,|\,\eta_2\,|}{|\,\eta_1+\eta_2\,|^2}\ \mathrm{Cos}\ 30^{\mathrm{o}} = 0{,}25$$

$$R = \frac{|\,\eta_2-\eta_1\,|^2}{|\,\eta_1+\eta_2\,|^2} = 0{,}75$$

b) De acuerdo con ec (42a) del capítulo anterior: $\langle\vec{\pi}\rangle_{incidente} = 1{,}0\ \mathrm{W/m^2}$

c) De acuerdo con ecs. (9)

$$\langle\vec{\pi}\rangle_{transmitida} = 0{,}25\ \mathrm{W/m^2}$$

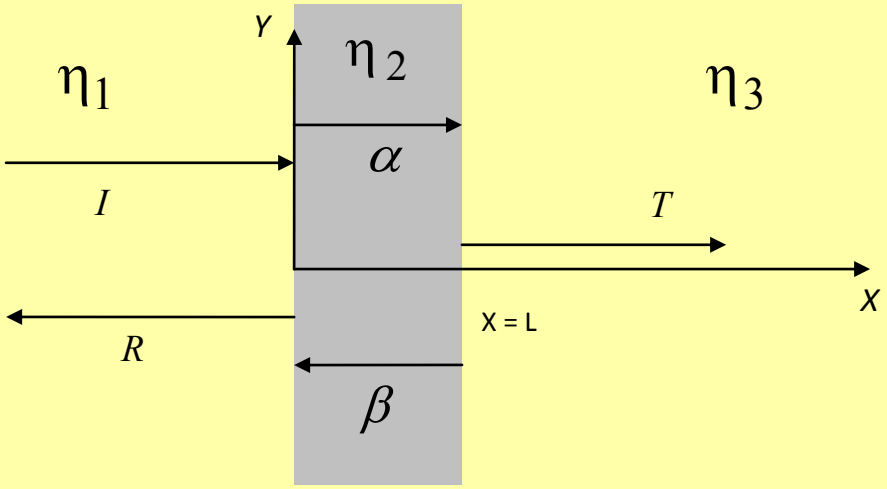
$$\langle\vec{\pi}\rangle_{reflejada} = 0{,}75\ \mathrm{W/m^2}$$

Ejemplo 3: Película delgada de un medio con impedancia η_2 entre 2 medios semi infinitos de impedancias η_1 y η_3.

a) Encontrar la relación E_{R0} / E_{I0}

b) Verificar que R=0 cuando $L = \lambda/4$ y $\eta_2^2 = \eta_1 \eta_3$.

Solución:



$$\vec{E}_I = \hat{e}_z E_{I0} e^{-ik_1 x} \qquad \vec{H}_I = -\hat{e}_y \frac{E_{I0}}{\eta_1} e^{-ik_1 x}$$

$$\vec{E}_R = \hat{e}_z E_{R0} e^{ik_1 x} \qquad \vec{H}_R = \hat{e}_y \frac{E_{R0}}{\eta_1} e^{ik_1 x}$$

$$\vec{E}_\alpha = \hat{e}_z E_{\alpha 0} e^{-ik_2 x} \qquad \vec{H}_\alpha = -\hat{e}_y \frac{E_{\alpha 0}}{\eta_2} e^{-ik_2 x}$$

$$\vec{E}_\beta = \hat{e}_z E_{\beta 0} e^{ik_2 x} \qquad \vec{H}_\beta = \hat{e}_y \frac{E_{\beta 0}}{\eta_2} e^{ik_2 x}$$

$$\vec{E}_T = \hat{e}_z E_{T0} e^{-ik_3 x} \qquad \vec{H}_T = -\hat{e}_y \frac{E_{T0}}{\eta_3} e^{-ik_3 x}$$

Condiciones de frontera en x = 0:

$$E_{1\tan}\Big|_{x=0} = E_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad E_{I0} + E_{R0} = E_{\alpha 0} + E_{\beta 0} \tag{i}$$

$$H_{1\tan}\Big|_{x=0} = H_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{I0} - E_{R0}}{\eta_1} = \frac{E_{\alpha 0} - E_{\beta 0}}{\eta_2} \tag{ii}$$

$$E_{2\tan}\Big|_{x=L} = E_{3\tan}\Big|_{x=L} \quad \Rightarrow \quad E_{\alpha 0}\, e^{-ik_2 L} + E_{\beta 0}\, e^{ik_2 L} = E_{T0}\, e^{-ik_3 L} \tag{iii}$$

$$H_{2\tan}\Big|_{x=L} = H_{3\tan}\Big|_{x=L} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{\alpha 0}\, e^{-ik_2 L} - E_{\beta 0}\, e^{ik_2 L}}{\eta_2} = \frac{E_{T0}\, e^{-ik_3 L}}{\eta_3} \tag{iv}$$

De (i) y (ii):

$$\frac{E_{R0}}{E_{I0}} = \frac{E_{\alpha 0}(\eta_2 - \eta_1) + E_{\beta 0}(\eta_2 + \eta_1)}{E_{\alpha 0}(\eta_2 + \eta_1) + E_{\beta 0}(\eta_2 - \eta_1)}$$

De (iii) y (iv)

$$E_{\alpha 0} = E_{\beta 0}\, e^{2ik_2 L}\left(\frac{\eta_2 + \eta_3}{\eta_3 - \eta_2}\right)$$

$$\frac{E_{R0}}{E_{I0}} = \frac{\eta_2(\eta_3 - \eta_1)\mathrm{Cos}(k_2 L) - i(\eta_2^2 - \eta_1\,\eta_3)\mathrm{Sen}(k_2 L)}{\eta_2(\eta_3 + \eta_1)\mathrm{Cos}(k_2 L) - i(\eta_2^2 + \eta_1\,\eta_3)\mathrm{Sen}(k_2 L)}$$

Efectivamente, Γ_{12}^2 se hace cero cuando $L = \lambda/4$ y $\eta_2^2 = \eta_1\,\eta_3$.

14.4 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN: INCIDENCIA OBLICUA

Para el análisis de la reflexión y transmisión de radiación que incide con vector de onda $\vec{k}_i$ haciendo un ángulo $\theta_i \neq 0$ con la normal consideraremos dos casos:

CASO 1. Polarización S o vertical, significa campo eléctrico en la dirección perpendicular al plano de incidencia, es decir, perpendicular al plano de la figura, representado en la figura (4) por un aspa.

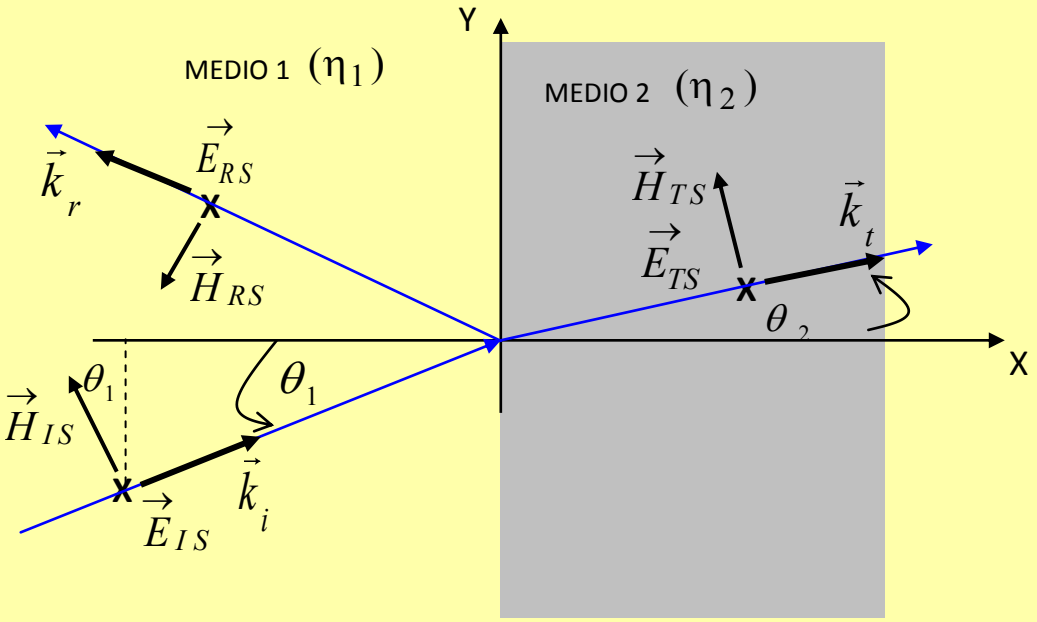


Fig. (4) Esquema para explicar reflexión y refracción de ondas con Polarización S. ("senkrecht" en alemán = perpendicular).

Las expresiones para los campos de las ondas incidente, reflejada y transmitida:

$$\vec{E}_I = \hat{e}_z E_{IS0} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \qquad \vec{H}_I = \vec{H}_{IS0} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \tag{13a}$$

$$\vec{E}_R = \hat{e}_z E_{RS0} e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \qquad \vec{H}_R = \vec{H}_{RS0} e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tag{13b}$$

$$\vec{E}_T = \hat{e}_z E_{TS0} e^{-i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \qquad \vec{H}_T = \vec{H}_{TS0} e^{-i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \tag{13c}$$

COEFICIENTES DE FRESNEL: INCIDENCIA OBLICUA POLARIZACIÓN S

Para deducir las relaciones entre las amplitudes de ondas reflejada y transmitida con la amplitud de la onda incidente usamos las condiciones de frontera en la interfase entre los dos medios ($x = 0$). Con ayuda de la figura (4) podemos ver que:

$$E_{1\tan}\Big|_{x=0} = E_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad E_{IS0} + E_{RS0} = E_{TS0}$$

$$H_{1\tan}\Big|_{x=0} = H_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{IS0} - E_{RS0}}{\eta_1}\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 = \frac{E_{TS0}}{\eta_2}\mathrm{Cos}\,\theta_2$$

De resolver estas dos ecuaciones se obtienen E_{TS0} y E_{RS0} en términos de E_{IS0}:

$$E_{TS0} = \frac{2\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1}{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2 + \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1}E_{IS0}$$

$$E_{RS0} = \frac{\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 - \eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}{\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 + \eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}E_{IS0}$$

Los coeficientes:

$$\tau_{S12} = \tau_S = \frac{2\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1}{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2 + \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1} \tag{14a}$$

$$\Gamma_{S12} = \Gamma_S = \frac{\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 - \eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}{\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 + \eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2} \tag{14b}$$

son los coeficientes de Fresnel para incidencia oblicua de ondas con polarización vertical.

Puede verificarse que $\tau_{21}\,\tau_{12} - \Gamma_{21}\,\Gamma_{12} = 1$

Caso 2. Polarización P o polarización horizontal,

Polarización P significa campo eléctrico en el plano de incidencia, es decir, en el plano de la figura.

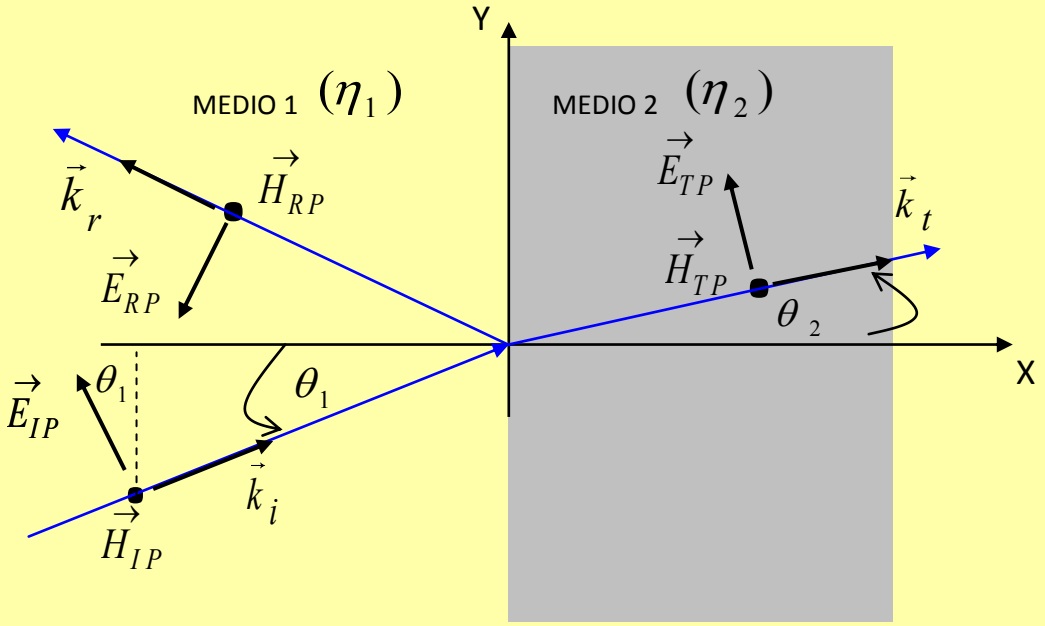


Fig. (5) Esquema para explicar reflexión y refracción de ondas con polarización P. (La dirección del campo **H** es saliendo del plano de la figura).

Las expresiones para los campos de las ondas incidente, reflejada y transmitida:

$$\vec{H}_I = \hat{e}_z H_{IP0} e^{-i\vec{k}_i \bullet \vec{r}} \qquad \vec{E}_I = \vec{E}_{IP0} e^{-i\vec{k}_i \bullet \vec{r}} \tag{15a}$$

$$\vec{H}_R = \hat{e}_z H_{RP0} e^{-i\vec{k}_r \bullet \vec{r}} \qquad \vec{E}_R = \vec{E}_{RP0} e^{-i\vec{k}_r \bullet \vec{r}} \tag{15b}$$

$$\vec{H}_T = \hat{e}_z H_{TP0} e^{-i\vec{k}_t \bullet \vec{r}} \qquad \vec{E}_T = \vec{E}_{TP0} e^{-i\vec{k}_t \bullet \vec{r}} \tag{15c}$$

COEFICIENTES DE FRESNEL EN INCIDENCIA OBLICUA: POLARIZACIÓN P

Para deducir las relaciones entre las amplitudes de ondas reflejada y transmitida con la amplitud de la onda incidente usamos las condiciones de frontera en la interfase entre los dos medios ($x = 0$). Con ayuda de la figura (5) establecemos que:

$$H_{1\tan}\Big|_{x=0} = H_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{IP0} + E_{RP0}}{\eta_1} = \frac{E_{TP0}}{\eta_2}$$

$$E_{1\tan}\Big|_{x=0} = E_{2\tan}\Big|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \left(E_{IP0} - E_{RP0}\right)\mathrm{Cos}\,\theta_1 = E_{TP0}\,\mathrm{Cos}\,\theta_2$$

De resolver estas dos ecuaciones se obtienen $\mathbf{E}_{TP0}$ y $\mathbf{E}_{RP0}$ en términos de $\mathbf{E}_{IP0}$:

$$E_{TP0} = \frac{2\,\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1}{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 + \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}\,E_{IP0}$$

$$E_{RP0} = \frac{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 - \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 + \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}\,E_{IP0}$$

Los coeficientes:

$$\tau_{P12} = \tau_P = \frac{2\,\eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_1}{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 + \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2} \qquad (16a)$$

$$\Gamma_{P12} = \Gamma_P = \frac{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 - \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2}{\eta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1 + \eta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2} \qquad (16b)$$

son los coeficientes de Fresnel para incidencia oblicua con polarización P

También: $\tau_{21}\,\tau_{12} - \Gamma_{21}\,\Gamma_{12} = 1$

COEFICIENTES DE FRESNEL EN FUNCIÓN DE ÍNDICES DE REFRACCIÓN

Para medios no magnéticos podemos usar la siguiente relación entre impedancia de índice de refracción:

$$\eta = \frac{\eta_0}{n}$$

De modo que los coeficientes de Fresnel pueden ahora ser escritos en la forma:

$$\tau_S = \frac{2\, n_1 \operatorname{Cos}\theta_1}{n_1 \operatorname{Cos}\theta_1 + n_2 \operatorname{Cos}\theta_2} \quad \text{y} \quad \Gamma_S = \frac{n_1 \operatorname{Cos}\theta_1 - n_2 \operatorname{Cos}\theta_2}{n_1 \operatorname{Cos}\theta_1 + n_2 \operatorname{Cos}\theta_2} \qquad (17a)$$

$$\tau_P = \frac{2\, n_1 \operatorname{Cos}\theta_1}{n_2 \operatorname{Cos}\theta_1 + n_1 \operatorname{Cos}\theta_2} \quad \text{y} \quad \Gamma_P = \frac{n_2 \operatorname{Cos}\theta_1 - n_1 \operatorname{Cos}\theta_2}{n_2 \operatorname{Cos}\theta_1 + n_1 \operatorname{Cos}\theta_2} \qquad (7b)$$

COEFICIENTES DE FRESNEL EN FUNCIÓN DE LOS ÁNGULOS θ_1 y θ_2

Usando la ley de Snell y considerando sólo medios dieléctricos sin pérdidas de modo que los senos sean siempre reales:

$$n_1 \operatorname{Sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{Sen}\theta_2$$

Los coeficientes de Fresnel también pueden ser escritos en la forma:

$$\tau_S = \frac{2 \operatorname{Cos}\theta_1 \operatorname{Sen}\theta_2}{\operatorname{Sen}(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \Gamma_S = \frac{\operatorname{Sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{Sen}(\theta_2 + \theta_1)} \qquad (18a)$$

$$\tau_P = \frac{2 \operatorname{Cos}\theta_1 \operatorname{Sen}\theta_2}{\operatorname{Sen}\left(\theta_1 + \theta_2\right) \operatorname{Cos}\left(\theta_1 - \theta_2\right)} \qquad \Gamma_P = \frac{Tg\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{Tg\left(\theta_1 + \theta_2\right)} \qquad (18b)$$

REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA EN INCIDENCIA OBLICUA

Definiciones de reflectancia y transmitancia para incidencia oblicua cuando los medios son dieléctricos perfectos, de modo que los cosenos son reales:

$$R_{12} = \left| \frac{\langle \vec{\pi}_r \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \vec{\pi}_i \rangle \cdot \hat{n}} \right| = |\Gamma_{12}|^2$$

$$T_{12} = \left| \frac{\langle \vec{\pi}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \vec{\pi}_i \rangle \cdot \hat{n}} \right| = \frac{n_2 \ \mathrm{Cos}\,\theta_2}{n_1 \ \mathrm{Cos}\,\theta_1} \ |\tau_{12}|^2$$

Expresiones para transmitancia y reflectancia en términos de los índices de refracción:

$$R_S = \left(\frac{n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_1 - n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_2}{n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_1 + n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_2} \right)^2$$

$$R_P = \left(\frac{n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 - n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_2}{n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 + n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_2} \right)^2$$

$$T_S = \frac{4 n_1 n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 \mathrm{Cos}\,\theta_2}{\left(n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_1 + n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_2 \right)^2}$$

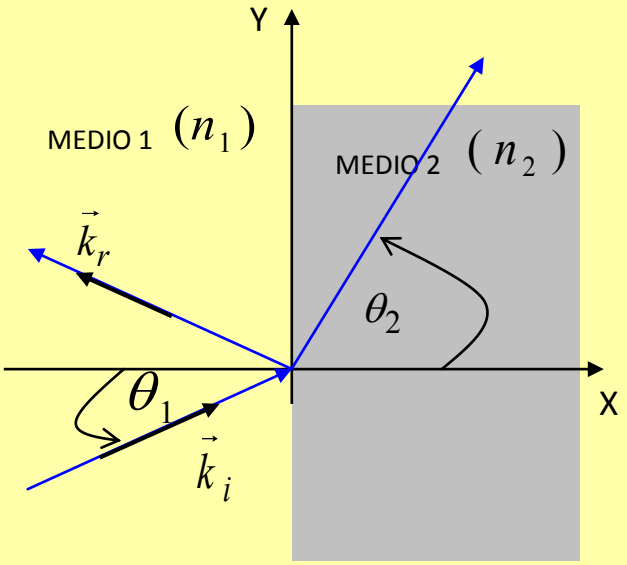
$$T_P = \frac{4 n_1 n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 \mathrm{Cos}\,\theta_2}{\left(n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 + n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_2 \right)^2}$$

Puede verificarse que para ambos tipos de polarización se cumple:

$$R + T = 1$$

REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

Cuando el índice de refracción del medio 1 es mayor que el del medio 2, de acuerdo a la ley de Snell, el ángulo de refracción θ_2 será mayor que el de incidencia. Si el ángulo de incidencia comienza a aumentar desde cero, encontraremos un ángulo crítico θ_C menor que 90^0 para el cual el ángulo θ_2 es 90^0. Si continuamos aumentando el ángulo de incidencia no hay rayo transmitido. Toda la radiación es reflejada. A este fenómeno se le llama **Reflexión interna total**.



Ley de Snell:

$$n_1 \,\text{Sen}\,\theta_1 = n_2 \,\text{Sen}\,\theta_2$$

$$\text{Si } n_1 > n_2 \Rightarrow \theta_2 > \theta_1$$

$$\text{Si } \theta_2 = 90^0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_C$$

$$\text{Sen}\,\theta_C = \frac{n_2}{n_1}$$

ONDA EVANESCENTE:

Para analizar en detalle qué sucede cuando $\theta_1 > \theta_C$ consideremos las expresiones para los campos de la onda incidente y transmitida:

$$\vec{E}_I = \vec{E}_{I\,0}\, e^{i\omega t}\, e^{-i(k_i \,\text{Cos}\,\theta_1\, x + k_i \,\text{Sen}\,\theta_1\, y)} \qquad \text{(i)}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{T\,0}\, e^{i\omega t}\, e^{-i(k_t \,\text{Cos}\,\theta_2\, x + k_t \,\text{Sen}\,\theta_2\, y)} \qquad \text{(ii)}$$

Si $\theta_1 > \theta_C$, el ángulo refractado θ_2 no puede ser real. Así que será más conveniente escribir:

$$k_t^2 \ \mathrm{Cos}^2\theta_2 = k_t^2\left[1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \mathrm{Sen}^2\theta_1\right] \Rightarrow k_2 \mathrm{Cos}\,\theta_2 = -i\,K \qquad \text{(iii)}$$

donde:

$$K = k_t\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \mathrm{Sen}^2\theta_1 - 1\right]^{1/2} = \frac{n_2\,\omega}{c}\left[\left(\frac{\mathrm{Sen}\,\theta_1}{\mathrm{Sen}\,\theta_C}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

Reemplazando ec.(iii) en ec. (ii), obtenemos para la onda transmitida:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{T0}\ e^{-K x}\ e^{i\omega t}\ e^{-i k_i \mathrm{Sen}\,\theta_1 y}$$

Este resultado se interpreta diciendo que la onda “transmitida” se propaga a lo largo del eje Y, adyacente y paralela a la interfase, atenuándose exponencialmente al penetrar al medio 2. Ésta se conoce como onda evanescente.

Reemplazando la ec. (iii) en las ecs (17), se obtiene:

$$\Gamma_S = \frac{n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_1 - i\ n_2\,(K/k_2)}{n_1 \mathrm{Cos}\,\theta_1 + i\,n_2\,(K/k_2)}$$

$$\Gamma_P = \frac{n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 - i\ n_1\,(K/k_2)}{n_2 \mathrm{Cos}\,\theta_1 + i\ n_1\,(K/k_2)}$$

Verificándose entonces que para ambos tipos de polarización, S y P se tiene reflectancia R = 1.

LEY DE BREWSTER

Observando la lista de coeficientes de Fresnel en función sólo de los ángulos de incidencia y de refracción (ecs. 18), puede verse que para el caso especial

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^{\circ}$$

el coeficiente de Fresnel Γ_P , para reflexión de ondas polarizadas con **E** en el plano de incidencia es cero. Combinando esta observación con la ley de Snell, para cada par de medios dieléctricos perfectos con índices de refracción n_1 y n_2 podemos hallar el valor de dicho ángulo.

$$n_1 \operatorname{Sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{Sen} (90 - \theta_1)$$

El ángulo de incidencia para obtener reflectancia con polarización P nula es entonces:

$$\operatorname{Tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Este resultado permite diseñar un experimento para obtener luz polarizada linealmente a partir de luz no polarizada. Si la radiación incidente con ángulo de incidencia θ_B tiene ambos tipos de polarización, la radiación reflejada tendrá sólo polarización S, es decir con **E** perpendicular al plano de incidencia.

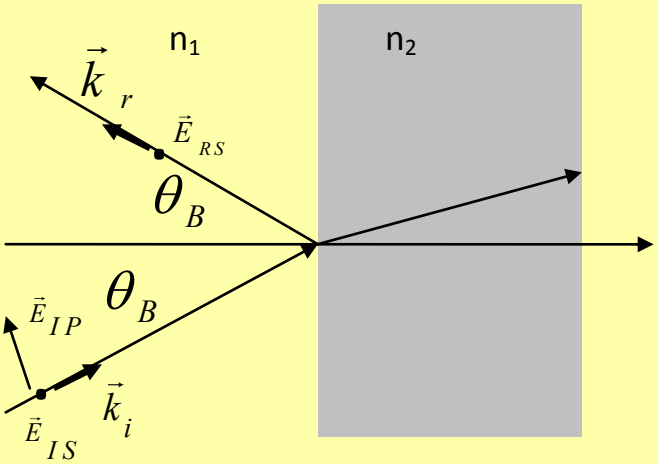


Fig. 6 Cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster, la reflexión de la radiación con polarización P es nula. Los campos magnéticos se han omitido en el esquema.

Ejemplo 4 Se sabe que el índice de refracción del vidrio es 1,5. (a) ¿Cuál es el valor del ángulo de Brewster para una onda electromagnética que se propaga del aire hacia el vidrio?, (b) ¿Cuál es el valor del ángulo Brewster para una onda electromagnética que se propaga del vidrio hacia el aire? (c) Para un rayo que incide desde el vidrio hacia el aire con el ángulo de Brewster $\theta_1 = \theta_B$, ¿cuál es el ángulo de refracción θ_2?

Solución:

a) aire a vidrio $\quad \text{Tg}\,\theta_B = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta_B = 56{,}31^\circ$

b) vidrio a aire $\quad \text{Tg}\,\theta_B = \dfrac{1}{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad \theta_B = 33{,}69^\circ$

c) vidrio a aire $\quad 1{,}5\,\text{Sen}\,33{,}69^\circ = 1{,}0\,\text{Sen}\,\theta_2$

$$\theta_2 = 56{,}31^\circ$$

Observar que los ángulos de Brewster para dos medios son complementarios y que se intercambian los roles de ángulo incidente y ángulo de refracción.

Ejemplo 5. Una onda plana con polarización perpendicular incide oblicuamente sobre una frontera plana con $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 4{,}0\,\varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Suponga E_{i0} = 20 V/m, f = 300 MHz y $\theta_i = 37^0$.

a) Calcule los coeficientes de reflexión y transmisión

b) Escriba las expresiones para $\mathbf{E}_i(x, z, t)$, $\mathbf{E}_r(x, z, t)$ y $\mathbf{E}_t(x, z, t)$

Solución:

$$n_1 = 1{,}0\,, \quad n_2 = 2{,}0\,\varepsilon_0\,, \quad \theta_1 = 37^0$$

$$1{,}0\,\text{Sen}37^0 = 2{,}0\,\text{Sen}\theta_2$$

$$\text{Sen}\theta_1 = 0{,}6 \quad \text{Cos}\,\theta_1 = 0{,}8 \;\; ; \;\; \text{Sen}\theta_2 = 0{,}3 \quad \text{Cos}\,\theta_2 = 0{,}954$$

$$\tau_S = \frac{2\, n_1 \operatorname{Cos}\theta_1}{n_1 \operatorname{Cos}\theta_1 + n_2 \operatorname{Cos}\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \tau_S = 0{,}591$$

$$\Gamma_S = \frac{n_1 \operatorname{Cos}\theta_1 - n_2 \operatorname{Cos}\theta_2}{n_1 \operatorname{Cos}\theta_1 + n_2 \operatorname{Cos}\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_S = -0{,}409$$

$$k = \frac{\omega}{c} n \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2\pi \;\; , \;\; k_2 = 4\pi$$

$$\vec{E}_I = \hat{e}_y \, 20\, e^{i\omega t}\, e^{-i2\pi\,(0{,}8x + 0{,}6z)} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_R = -\hat{e}_y \, (8.18) e^{i\omega t}\, e^{-i2\pi\,(-0{,}8x + 0{,}6z)} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_T = \hat{e}_y \left(11{,}82\right) e^{i\omega t}\, e^{-i4\pi\,(0{,}954x + 0{,}409z)} \text{ V/m}$$

Ejemplo 6. Una onda plana en el aire tiene la siguiente expresión fasorial: $\vec{E}_I(x,z) = \hat{e}_y 10\, e^{-i(\,x+z)}$ V/m . La onda incide sobre un plano conductor perfecto en $z = 0$.

a) Calcule la longitud de onda y la frecuencia

b) Determine el ángulo de incidencia

c) Escriba las expresiones $\vec{E}_I\,(x, z, t)$ y $\vec{H}_I\,(x, z, t)$.

d) Determine $\vec{E}_R\,(x, z, t)$ y $\vec{H}_R\,(x, z, t)$ de la onda reflejada.

e) Determine $\vec{E}_1\,(x, z, t)$ y $\vec{H}_1\,(x, z, t)$ del campo total en el aire.

Solución:

$$\vec{k} \bullet \vec{r} = x + z \quad \Rightarrow \quad k_x = k_z = 1$$

$$k = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{2}\, c}{2\pi}$$

Dirección de propagación de la onda incidente:

$$\hat{e}_{pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_x + \hat{e}_z\right) \;\Rightarrow\; \theta_i = \theta_1 = 45^\circ$$

$$\vec{E}_I(x,z,t) = \hat{e}_y 10\, e^{i\sqrt{2}\,c\,t}\; e^{-i(x+z)} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_R(x,z) = -\hat{e}_y 10\, e^{i\sqrt{2}\,c\,t}\; e^{-i(-x+z)} \text{ V/m}$$

$$\vec{H}_I(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_z - \hat{e}_x\right)\frac{10}{377}\, e^{i\sqrt{2}\,c\,t}\; e^{-i(x+z)} \text{ A/m}$$

$$\vec{H}_R(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_z + \hat{e}_x\right)\frac{10}{377}\, e^{i\sqrt{2}\,c\,t}\; e^{-i(-x+z)} \text{ A/m}$$

$$\vec{E}_1(x,z) = -\;\hat{e}_y 20\;\; e^{i\,\pi/2}\;\; e^{i\,\sqrt{2}\,c\,t}\;\; e^{-i\,z}\,\text{Sen}\;\; x \;\text{ V/m}$$

$$\vec{H}_1(x,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{20}{377}\;\; e^{i\,\sqrt{2}\,c\,t}\;\; e^{-i\,z\,t}\left(\text{Cos}\,x\,\hat{e}_z + i\;\text{Sen}\,x\,\hat{e}_x\right)\text{A/m}$$

Puesto que $g_2 \to \infty$, entonces $\eta_2 \approx 0$ y de acuerdo con ecs. (14a) y (16a), la onda transmitida es nula.

PROBLEMAS

1 . Una onda electromagnética plana cuyo campo eléctrico está descrito por:

$$\vec{E}_I(z) = \hat{e}_x 10\, e^{i\omega t}\; e^{-i2\pi z}\ \text{V/m}$$

se propaga en el aire e incide normalmente en un medio no magnético, sin pérdidas con permitividad relativa 2,25.

a) Encontrar los valores de los coeficientes de Fresnel τ y Γ .

b) Encontrar el valor de la razón de onda estacionaria

c) Encontrar los valores de la transmitancia y reflectancia R y T

d) Dé una expresión para los campos eléctricos de las ondas reflejada y transmitida.

2. Una onda electromagnética plana cuyo campo eléctrico está descrito por:

$$\vec{E}_I(z) = \hat{e}_x 10\, e^{i\omega t} e^{-i2\pi z}\ \text{V/m}$$

se propaga en el aire e incide normalmente en un medio no magnético, con tangente de pérdidas 0,364 y con permitividad relativa 2,25.

a) Encontrar los valores de los coeficientes de Fresnel τ y Γ .

b) Encontrar el valor de la razón de onda estacionaria

c) Encontrar los valores de la transmitancia y reflectancia R y T

d) Dé una expresión transmitida para los campos eléctricos de las ondas reflejada y transmitida.

3. Una onda electromagnética cuyo campo eléctrico está descrito por el fasor:

$$\vec{E} = 36{,}9\left(\hat{e}_x + 2\,i\,\hat{e}_y\right) e^{-i\beta z}\ \text{V/m}$$

y que se propaga en el aire, incide normalmente en el plano z = 0 sobre un medio dieléctrico semi infinito no magnético de permitividad relativa $\varepsilon_r = 4$. Calcular:

a) La potencia por unidad de área que transporta la onda incidente
b) La potencia por unidad de área que transporta la onda reflejada
c) La potencia por unidad de área que transporta la onda transmitida.
d) ¿Qué tipo de polarización y helicidad tiene la onda incidente?
e) ¿Qué tipo de polarización y helicidad tiene la onda reflejada?

4. **Aproximación Hagens Rubens**: Para la reflectancia de una onda electromagnética que se propaga en el aire e incide normalmente sobre un buen conductor no magnétrico, frecuentemente se usa la llamada aproximación Hagens Rubens:

$$R = 1 - 2\sqrt{\frac{2\,\varepsilon_0\,\omega}{g}}$$

a) Obtenga la aproximación Hagens Rubens a partir de los coeficientes de Fresnel en función de las impedancias intrínsecas.
b) Obtenga la aproximación Hagens Rubens a partir de los coeficientes de Fresnel en función de los índices de refracción
c) Verifique que es equivalente a: $R = 1 - 4\pi\,\delta_2 / \lambda_1$

5. El coeficiente de Fresnel para reflexión de ondas que inciden normalmente desde el aire (medio 1) en un medio 2 (x>0) es $\Gamma = -0,25$. Calcular:

a) la impedancia intrínseca del medio 2
b) el índice de refracción del medio 2
c) si la longitud de onda en el medio 1 es 1,0 m , ¿Cuál es la longitud de onda en el medio (2)?
d) si el campo eléctrico de la onda inciedente es:

$$\vec{E}_I = 100\,\hat{e}_y\; e^{i\omega t}\; e^{-i2\pi x}\ \text{V/m}$$

dé una expresión para el campo de la onda transmitida.

6. El coeficiente de Fresnel para reflexión de ondas que inciden normalmente desde el aire (medio 1) en un medio 2 (x>0) es $\Gamma = 0,4\,e^{i(5\pi/6)}$. Calcular:

a) la impedancia intrínseca del medio 2

b) el índice de refracción del medio 2

c) si la longitud de onda en el medio 1 es 1,0 m, ¿cuál es la longitud de onda en el medio (2)?

d) si el campo eléctrico de la onda incidente es:

$$\vec{E}_I = 100\,\hat{e}_y\; e^{i\omega t}\; e^{-i2\pi x}\ \text{V/m}$$

dé una expresión para el campo de la onda transmitida.

7. Una onda electromagnética cuyo campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}_I = 200\,\hat{e}_z\; e^{i\omega t}\; e^{-i2\pi(x+y)}\ \text{V/m}$$

se propaga en el aire e incide sobre un medio semiinfinito $x > 0$ con permitividad eléctrica 6,25. Hallar:

a) Los coeficientes de Fresnel para reflectancia y transmitancia

b) Las intensidades de las onda incidente, reflejada y transmitida.

c) Una expresión para los campos eléctricos de las ondas reflejada y transmitida en función de la posición y el tiempo.

8. Una onda electromagnética cuyo campo intensidad magnética está dado por:

$$\vec{H}_I = 0{,}531\,\hat{e}_z\; e^{i\omega t}\; e^{-i2\pi(x+y)}\ \text{A/m}$$

se propaga en el aire e incide sobre un medio semiinfinito x > 0 con permitividad eléctrica 6,25. Hallar:

a) Los coeficientes de Fresnel para reflectancia y transmitancia

b) Las intensidades de las onda incidente, reflejada y transmitida.

c) Una expresión para los campos eléctricos de las ondas reflejada y transmitida en función de la posición y el tiempo.

9. Observar que los coeficientes de Fresnel para incidencia normal o para incidencia oblicua polarización S satisfacen $\tau = 1 + \Gamma$. ¿Por qué no satisfacen esta relación los coeficientes de Fresnel para incidencia oblicua polarización P?

APÉNDICE

OPERACIONES SOBRE CAMPOS ESCALARES Y CAMPOS VECTORIALES

Coordenadas Cartesianas

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$div\ \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$rot\ \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas Esféricas

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial r}\ \hat{e}_r + \frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\ \hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\ \frac{\partial f}{\partial \phi}\ \hat{e}_\phi$$

$$div\ \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\ sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\ F_\theta\right) + \frac{1}{r\ sen\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F} = {} & \frac{1}{r\,sen\,\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\ F_\phi\right) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right\}\hat{e}_r + \\ & \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{sen\ \theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ F_\phi\right)\right\}\hat{e}_\theta + \\ & \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ F_\theta\right) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right\}\hat{e}_\phi\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$grad\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\ \hat{e}_\rho\ +\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\ \hat{e}_\phi\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\ \hat{k}$$

$$div\, \vec{F}\ =\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\rho\right)\ +\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}\ +\ \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F}\ =\ & \left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi}-\frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right\}\hat{e}_\rho\ + \\ & \left\{\frac{\partial F_\rho}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right\}\hat{e}_\phi\ + \\ & \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\phi\right)-\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right\}\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f\ =\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)\ +\ \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\ +\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas curvilíneas ortogonales

$$grad\, f = \frac{1}{h_\ell}\frac{\partial f}{\partial \ell}\ \hat{\ell}_0\ +\ \frac{1}{h_m}\frac{\partial f}{\partial m}\ \hat{m}_0\ +\frac{1}{h_n}\frac{\partial f}{\partial \ell}\ \hat{n}_0$$

$$div\ \ \vec{F} = \frac{1}{h_\ell h_m h_n}\left\{\frac{\partial}{\partial \ell}\left(F_\ell h_m h_n\right)+\frac{\partial}{\partial m}\left(F_m h_n h_\ell\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(F_n h_\ell h_m\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}rot\ \vec{F}\ =\ & \frac{1}{h_m h_n}\left(\frac{\partial}{\partial m}\left(F_n\ h_n\right)-\frac{\partial}{\partial n}\left(F_m\ h_m\right)\right)\hat{\ell}_0\ + \\ & \frac{1}{h_n h_\ell}\left(\frac{\partial}{\partial n}\left(F_\ell\ h_\ell\right)-\frac{\partial}{\partial \ell}\left(F_n\ h_n\right)\right)\hat{m}_0\ + \\ & \frac{1}{h_\ell h_m}\left(\frac{\partial}{\partial \ell}\left(F_m\ h_m\right)-\frac{\partial}{\partial m}\left(F_\ell\ h_\ell\right)\right)\hat{n}_0\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_\ell \, h_m h_n} \left(\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\frac{h_m \, h_n}{h_\ell} \frac{\partial f}{\partial \ell} \right) + \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{h_n \, h_\ell}{h_m} \frac{\partial f}{\partial m} \right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{h_\ell \, h_m}{h_n} \frac{\partial f}{\partial n} \right) \right)$$

INDICE ALFABÉTICO

Análisis vectorial 1
ángulo sólido 17
aproximación dipolar del campo magnético 328-329
aproximación Hagens Rubens 507
atenuación 455, 476
autoinductancia 391

blindaje magnético 361-363, 377, 440
bobinas de Helmholtz 335

campo despolarizante 174-180
campo eléctrico 35-38
campo eléctrico de
  un anillo 42
  una barra cilíndrica uniformemente polarizada 171-173, 178-179
  un cuadrupolo axial 77
  un dipolo eléctrico 62-63
  un disco uniformemente cargado 36, 43
  una esfera uniformemente cargada 52
  una esfera uniformemente polarizada 179-180
  un hilo uniformemente cargado 51
  un plano infinito 44, 50
campo eléctrico inducido 385
campo eléctrico no conservativo 383
campo eléctrico promedio 78-81
campo inducción magnética 295-338
campo inducción magnética de
  un alambre infinito 305
  una barra cilíndrica uniformemente polarizada 342, 345
  un bloque rectangular infinito 309, 318
  una esfera uniformemente magnetizada 346
  una espira circular 306
  un plano infinito 308
  un solenoide 307
campo local 182
campos escalares 1
campos vectoriales 1
capacitancia 233
capacitores 233-239
coeficiente de atenuación de una onda 456
coeficiente de fase 456
coeficientes de Fresnel incidencia normal 485
coeficientes de Fresnel incidencia oblicua 495, 497-498
coeficientes de capacitancia 251-255
coeficientes de potencial 245-250
condiciones de frontera de Dirichlet 95
condiciones de frontera de Neumann 95
condiciones de frontera para
  campos armónicos 438-440
  el campo eléctrico 192-194
  el campo magnético 351
conductor perfecto 439-440
curva de histéresis 350
curva de magnetización 350

decibeles 476-477
delta de Dirac 19-21
densidad de carga 33, 34

densidad de carga de magnetización 343-344
densidad de corriente 275
densidad de corriente superficial 276-277
densidad de energía electrostática 230
densidad de energía magnética 407
densidad de energía promediada en el tiempo 471-4473
densidad superficial de carga 33-34
densidad superficial de carga de magnetización 344
desplazamiento eléctrico 185, 186-187
desplazamiento virtual 240, 408
diamagnéticos 349
diamagnético perfecto 349
dipolo eléctrico 58- 65
Dirichlet (condiciones de frontera) 95
divergencia del campo eléctrico 47
divergencia del campo inducción magnética 320

ecuación de continuidad 277-278
ecuación de Laplace 55, 96
ecuación de onda 431-433
ecuación de Pöisson 55, 96
ecuaciones de Maxwell 429-430
energía de interacción 256-266, 413
energía electrostática 221-271
de dos cargas puntuales 221
de n cargas puntuales 222
de un capacitor 236
de una esfera uniformemente cargada 225-226, 230-231
de un sistema de conductores 225, 248
en términos del campo eléctrico 227-229

energía magnética 401-422
energía magnética de un cable coaxial 407- 408
electroimán 410
expansión multipolar del potencial eléctrico 66 -77
expansión multipolar de la energía de interacción 257-260

fasor 436-437
fasorial (notación) 436-437
ferromagnéticos 350
ferromagnético perfecto 350, 351, 355, 360, 366
flujo de inducción magnética magnética 320
flujo eléctrico 48, 90
Fourier 106
fuerza a partir de la energía electrostática 240-245
fuerza a partir de la energía de interacción 260-266
fuerza a partir de la energía magnetostática 408-412
fuerza electromotriz 282-283, 382
fuerza sobre un conductor 210-212
funciones de Green 159-162
funciones de Green para fronteras esféricas 160-161

generador homopolar 388
helicidad 465-467
histéresis (curva de) 350
histéresis (pérdidas por) 417-419

identidades vectoriales 9
imágenes electrostáticas 135-165
imágenes cilíndricas 138

imágenes magnetostáticas 354, 376
impedancia intrínseca compleja 458
impedancia intrínseca del vacío 451
impedancia intrínseca de un medio 451
índice de refracción 446
índice de refracción complejo 457
inductancia mutua 392
intensidad de una onda 475
interacción dipolo-dipolo 263-265, 414

laplaciano 8
laplaciano vectorial 8
Legendre 111, 112
líneas de fuerza 45-46
líneas de fuerza de
    de un dipolo eléctrico 65
    de un cuadrupolo axial 77
ley de Ampere 311-319, 348
ley Ampere Maxwell 425-428
ley de Brewster 502
ley de Coulomb 32
ley de Faraday 382
ley de Gauss 47-57, 186
ley de Gauss para el campo magnético 320
ley de Lenz 382
ley de Snell 483

magnetostática en el vacío 295-338
magnetostática en medios materiales 339-379
magnetización 339
momento cuadrupolar eléctrico 69-70
momento dipolar eléctrico 58
momento dipolar magnético 300, 329, 330

Neper 476
Neumann (fórmula de) 393
Neumann (condiciones de frontera) 95, 116

oblato 75
ondas planas 445-508
ondas estacionarias 488
onda evanescente 500-501

paramagnéticos 349
pérdidas por histéresis 417-419
permeabilidad magnética 349
permeabilidad magnética del vacío 303
permitividad eléctrica 187
permitividad eléctrica del vacío 32
plano de incidencia 482
polarizabilidad (coeficiente de) 183
polarización eléctrica 167-180
polarización circular 465
polarización derecha e izquierda 465-470
polarización de ondas electromagnéticas 463-470
polarización elíptica 465-469
polarización P 496
polarización S 494
potencial de contacto 130
potencial de tierra 81-82

potencial electrostático 39
potencial escalar magnético 330-332
potencial vectorial magnético 321-327
potencial vectorial magnético de
un alambre infinito 325
un plano infinito 326
una esfera uniformemente magnetizada 346

presión magnética 416-417
problema general de la electrostática 184-185
problema general de la magnetostática 347
problema general 2D en coordenadas cilíndricas 106
problema general 2D en coordenadas esféricas 112
profundidad de penetración 457
prolato 75

razón de onda estacionaria 489
reflectancia 486, 499, 501
reflexión 481-508
reflexión interna total 500-501
refracción 481-508
reluctancia 368
reluctancias en serie y paralelo 370
resistencia eléctrica 280
resistencias en serie y paralelo 281
resistividad eléctrica 281
rotacional del campo eléctrico 39
rotacional del campo inducción magnética 314

series de Fourier 106
series Fourier Legendre 112
superconductor 349, 355, 359, 366
superficies equipotenciales 45-46
superficies equipotenciales de
un dipolo eléctrico 64
un cuadrupolo axial 76
susceptibilidad eléctrica 181
susceptibilidad magnética 349

tangente de pérdidas 458
tensor gradiente de campo eléctrico 259
tensor momento cuadrupolar eléctrico 69-80
teorema de Green 159
teorema de Helmholtz 22-24
teorema de la divergencia 3
teorema de linealidad 97
teorema de Poynting 431-433
teorema de Stokes 5
teorema de unicidad 97-98
transmitancia 486, 499
transformaciones de Lorentz 301

BIBLIOGRAFIA

Este libro está constituido por las clases dictadas por el autor en la Facultad de Ciencias y en la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería. Para la preparación de estas clases, el autor ha consultado los siguientes libros:

1. Classical Electrodynamics, John David Jackson; John Wiley & sons, 1974
2. Electromagnetic theory, Julius Adams Stratton; McGraw-Hill 1941
3. Fundamentos de la teoría electromagnética, Reitz, Milford, Christy; Addison Wesley Iberoamericana, 1993
4. Electromagnetic Fields, Roald K. Wangsness; John Wiley & sons, 1979
5. Teoría electromagnética, Marcus Zahn; McGraw-Hill, México (1991)
6. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería, David K. Cheng; Addison Wesley Iberoamericana, 1993
7. Teoría Electromagnética, Wiliam H. Hayt; McGraw Hill de México 1991
8. The Feynmann lectures on physics; Fondo Educativo Iberoamericano, 1964
9. Campos y ondas electromagnéticas, Paul Lorrain y Dale Corson, Selecciones Científicas, Madrid 1972
10. Electromagnetismo, conceptos y aplicaciones, Marshall, DuBroff, Skitek, Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, 1997

BIOGRAFÍA DEL AUTOR

Arturo Fernando Talledo Coronado, nació en Viviate, Piura, en 1953. Estudió Secundaria en el Colegio Mariscal Castilla de Pueblo Nuevo de Colán y en la GUE San Miguel de Piura. Estudió Física en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), Lima, Perú. En la UNI obtuvo sucesivamente el Bachillerato en Ciencias (1977), Licenciatura, (1978), Maestría (1986) y Doctorado en 1992. Desarrolló su tesis de doctor en Chalmers University, Gotemburgo Suecia entre los años 1988 y 1992. Ha hecho pasantías de investigación en CNRS, Strasbourg, Francia; Hamburg University, Alemania; Universidad de Campinas, Brasil. Ha publicado algunos 10 artículos en revistas internacionales y unos 10 en revistas nacionales. Su principal tema de investigación es la producción de materiales por técnicas de alto vacío para aplicaciones en: recubrimientos duros, smart windows, baterías de litio, filtros ópticos. Otros temas de interés: plasmones, superconductividad y la construcción de equipos para liofilización. En el año 2004 ganó el premio al primer puesto en el Primer Concurso del Libro Universitario organizado por la Asamblea Nacional de Rectores (por el libro : Tecnología de Alto Vacío: Una herramienta para el desarrollo industrial"). En el año 2008 obtuvo premio al mejor trabajo presentado en el Simposio Peruano de Física en la PUCP. Actualmente se desempeña como profesor principal en la Facultad de Ciencias y en la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la UNI. Presidente Asociación Docentes de la UNI (2005-2007).También colabora con la Maestría en Ciencias e Ingeniería de los Materiales de la PUCP.

CURSO UNIVERSITARIO DE TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

Primera edición digital

Noviembre, 2015

Lima - Perú

© Arturo Talledo

PROYECTO LIBRO DIGITAL

PLD 2917

Editor: Víctor López Guzmán

Guzlop editoras

http://www.guzlop-editoras.com/
guzlopster@gmail.com
facebook.com/guzlop
twitter.com/guzlopster
731 2457 - 959 552 765
Lima - Perú

PROYECTO LIBRO DIGITAL (PLD)

El proyecto libro digital propone que los apuntes de clases, las tesis y los avances en investigación (papers) de las profesoras y profesores de las universidades peruanas sean convertidos en libro digital y difundidos por internet en forma gratuita a través de nuestra página web. Los recursos económicos disponibles para este proyecto provienen de las utilidades nuestras por los trabajos de edición y publicación a terceros, por lo tanto, son limitados.

Un libro digital, también conocido como e-book, eBook, ecolibro o libro electrónico, es una versión electrónica de la digitalización y diagramación de un libro que originariamente es editado para ser impreso en papel y que puede encontrarse en internet o en CD-ROM. Por, lo tanto, no reemplaza al libro impreso.

Entre las ventajas del libro digital se tienen:
- su accesibilidad (se puede leer en cualquier parte que tenga electricidad),
- su difusión globalizada (mediante internet nos da una gran independencia geográfica),
- su incorporación a la carrera tecnológica y la posibilidad de disminuir la brecha digital (inseparable de la competición por la influencia cultural),
- su aprovechamiento a los cambios de hábitos de los estudiantes asociados al internet y a las redes sociales (siendo la oportunidad de difundir, de una forma diferente, el conocimiento),
- su realización permitirá disminuir o anular la percepción de nuestras élites políticas frente a la supuesta incompetencia de nuestras profesoras y profesores de producir libros, ponencias y trabajos de investigación de alta calidad en los contenidos, y, que su existencia no está circunscrita solo a las letras.

Algunos objetivos que esperamos alcanzar:
- Que el estudiante, como usuario final, tenga el curso que está llevando desarrollado como un libro (con todas las características de un libro impreso) en formato digital.
- Que las profesoras y profesores actualicen la información dada a los estudiantes, mejorando sus contenidos, aplicaciones y ejemplos; pudiendo evaluar sus aportes y coherencia en los cursos que dicta.
- Que las profesoras y profesores, y estudiantes logren una familiaridad con el uso de estas nuevas tecnologías.
- El libro digital bien elaborado, permitirá dar un buen nivel de conocimientos a las alumnas y alumnos de las universidades nacionales y, especialmente, a los del interior del país donde la calidad de la educación actualmente es muy deficiente tanto por la infraestructura física como por el personal docente.
- El personal docente jugará un rol de tutor, facilitador y conductor de proyectos

de investigación de las alumnas y alumnos tomando como base el libro digital y las direcciones electrónicas recomendadas.

• Que este proyecto ayude a las universidades nacionales en las acreditaciones internacionales y mejorar la sustentación de sus presupuestos anuales en el Congreso.

En el aspecto legal:

• Las autoras o autores ceden sus derechos para esta edición digital, sin perder su autoría, permitiendo que su obra sea puesta en internet como descarga gratuita.

• Las autoras o autores pueden hacer nuevas ediciones basadas o no en esta versión digital.

Lima - Perú, enero del 2011

"El conocimiento es útil solo si se difunde y aplica"

Víctor López Guzmán
Editor